

# Algoritmos

Pedro Hokama

## Fontes

- [cirs] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest, Ronald L. Rivest e Clifford Stein.
  - [timr] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Apresentação Baseada:
- Stanford Algorithms  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFM1k0SDt7Q0xr1PIAr1Y5623cKiH7V>  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFM1k0SDt6EMI2s2WQBsLz17A5BEBK6>
  - Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
  - Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420
- Qualquer erro é de minha responsabilidade.

## Satisfazibilidade de Fórmulas

- Uma fórmula booleana  $\phi$  é composta de:
  - ▶  $n$  variáveis booleanas:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
  - ▶  $m$  conectivos booleanos:  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - ▶ parênteses
- Ex.  $\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$

## Satisfazibilidade de Fórmulas

### Problema da Satisfazibilidade de Fórmulas - SAT

Dada uma fórmula booleana, decidir se existe uma atribuição das variáveis booleanas que faz com que ela seja avaliada como 1 (verdadeira).

- No exemplo  $\phi$  é satisfazível com a atribuição  $\langle x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1 \rangle$
- Um algoritmo ingênuo que testa todas as possibilidades é inviável pois existem  $2^n$  atribuições diferentes.

**Teorema**  
*SAT é NP-completo*

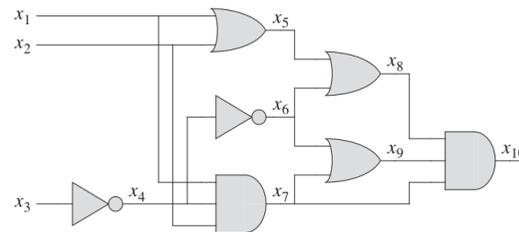
**Lema**  
*SAT ∈ NP*

**Lema**  
*SAT ∈ NP-Difícil*

**Lema**  
*SAT ∈ NP*

- Para mostrar que  $SAT \in NP$ , mostramos que um certificado consiste em uma atribuição satisfatória das variáveis. Esse certificado pode ser verificado substituindo cada variável pelo valor dessa atribuição e avaliando a expressão, que pode ser feito em tempo polinomial. Se o resultado for 1 o algoritmo verificou que a formula é satisfazível.

- Para mostrar que  $SAT \in NP$ -Difícil mostraremos que  $CIRCUIT-SAT \leq_p SAT$ .
- Considere um circuito  $C$  qualquer. Para cada fio  $x_i$  no circuito, a fórmula  $\phi$  vai ter uma variável  $x_i$ , expressamos cada porta lógica como uma cláusula na formula booleana que representa o seu comportamento. No fim fazemos a conjunção das cláusulas.



$$\begin{aligned} \phi = & x_{10} \wedge (x_4 \leftrightarrow \neg x_3) \\ & \wedge (x_5 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)) \\ & \wedge (x_6 \leftrightarrow \neg x_4) \\ & \wedge (x_7 \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)) \\ & \wedge (x_8 \leftrightarrow (x_5 \vee x_6)) \\ & \wedge (x_9 \leftrightarrow (x_6 \vee x_7)) \\ & \wedge (x_{10} \leftrightarrow (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)). \end{aligned}$$

**Lema**  
*C é satisfazível se e somente se  $\phi$  é satisfazível.*

- Esse algoritmo de redução executa em tempo polinomial.
- ( $\rightarrow$ ) Se  $C$  tem uma atribuição que satisfaz, cada fio tem um valor bem definido e a saída do circuito é 1.
- Portanto se atribuirmos os valores de cada fio para as respectivas variáveis, a fórmula também terá valor 1.
- ( $\leftarrow$ ) Se uma atribuição faz  $\phi$  verdadeira. Podemos atribuir o valor de cada fio com o valor das suas respectivas variáveis. E  $C$  terá saída igual a 1.
- Portanto mostramos que  $\text{CIRCUIT-SAT} \leq_p \text{SAT}$ .  $\square$

9 / 35

**Teorema**  
*3-CNF-SAT é NP-completo*

**Lema**  
*3-CNF-SAT  $\in$  NP*

Prova igual à prova que  $\text{SAT} \in \text{NP}$ .

11 / 35

## Satisfazibilidade 3-CNF

- Uma fórmula está na forma normal conjuntiva (*conjunctive normal form* - CNF) se é expressa como uma conjunção (ANDs) de cláusulas, e cada cláusula como disjunções (ORs) de uma ou mais literais.
- Uma fórmula booleana está na forma normal 3-conjuntiva (3-CNF) se está na forma normal conjuntiva e cada cláusula tem exatamente três literais distintas.
- Por exemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

**3-CNF-SAT**  
Dada uma fórmula booleana na forma normal 3-conjuntiva, decidir se existe uma atribuição das variáveis booleanas que faz com que ela seja avaliada como 1 (verdadeira).

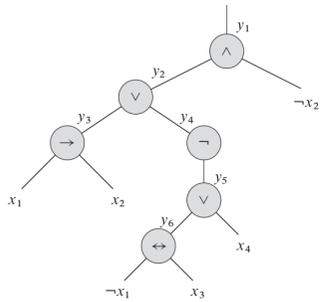
10 / 35

**Lema**  
*3-CNF-SAT  $\in$  NP-Difícil*

- Para mostrar que  $3\text{-CNF-SAT} \in \text{NP-Difícil}$  mostraremos que  $\text{SAT} \leq_p 3\text{-CNF-SAT}$ .
- Considere  $\phi$  uma fórmula booleana qualquer.
- Primeiramente construímos uma árvore de análise para  $\phi$  em que cada literal é uma folha e os conectivos são nós internos. Essa construção sempre é possível (usando a associatividade podemos colocar parênteses para explicitar uma ordenação)

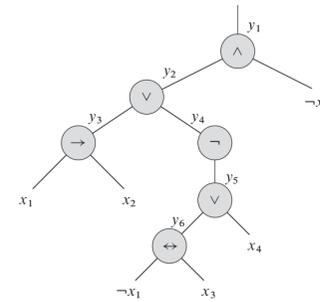
12 / 35

- Por exemplo  $\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$ .



- Depois dessa construção, introduzimos uma variável para cada aresta que sobe dos nós internos.
- A seguir escrevemos cláusulas para cada nó interno. E fazemos a conjunção dessas cláusulas e criamos uma fórmula  $\phi'$ .

- Por exemplo  $\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$ .



- No exemplo ao lado a fórmula obtida seria:

$$\begin{aligned} \phi' = & y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)) \\ & \wedge (y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4)) \\ & \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \\ & \wedge (y_4 \leftrightarrow \neg y_5) \\ & \wedge (y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)) \\ & \wedge (y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3)) . \end{aligned}$$

- Dessa forma obtemos cláusulas que tem no máximo 3 literais. Mas ainda não está na forma normal 3-conjuntiva. Então podemos escrever a tabela verdade de cada cláusula, e encontrar os valores que tornam ela FALSA. Por exemplo a cláusula  $\phi'_1 = y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)$

$y_1$	$y_2$	$x_2$	$(y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2))$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

- Analisando as linhas da tabela que tornam a cláusula FALSA obtemos:  
 $(y_1 \wedge y_2 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_2)$

- Agora aplicamos a lei de DeMorgan

$$\phi''_1 = (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee x_2)$$

- Caso a cláusula resultante só tenha 2 literais ( $l_1 \vee l_2$ ), então incluímos uma literal auxiliar e a seguinte fórmula  $(l_1 \vee l_2 \vee p) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \neg p)$
- No caso de uma cláusula com uma única literal  $l$ , incluímos 2 literais auxiliares  $(l \vee p \vee q) \wedge (l \vee p \vee \neg q) \wedge (l \vee \neg p \vee q) \wedge (l \vee \neg p \vee \neg q)$ .
- Seja  $\phi'''$  a fórmula em 3-CNF-SAT resultante.

**Lema**

$\phi'''$  é satisfazível se e somente se  $\phi$  é satisfazível.

- Como todas as transformações preservam o valor algébrico da fórmula, tanto  $\phi$  quanto  $\phi'''$  são equivalentes.
- A redução pode ser calculada em tempo polinomial. Construir  $\phi'$  a partir de  $\phi$  introduz no máximo uma variável e uma cláusula por conectivo.
- Construir  $\phi''$  a partir de  $\phi'$  introduz no máximo oito cláusulas para cada cláusula. E a construção de  $\phi'''$  no máximo multiplica por 4 o número de cláusulas.
- Portanto mostramos uma redução de tempo polinomial de SAT para 3-CNF-SAT e concluímos a prova.

## CLICK

### Problema do CLICK

Dado um grafo não orientado  $G = (V, E)$ , e um inteiro  $k$  decidir se existe um subgrafo  $G'$  induzido de  $G$  que tenha  $k$  vértices e seja completo.

### Teorema

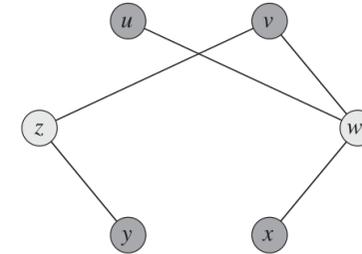
CLICK é NP-completo

- Provado com  $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{CLICK}$

17 / 35

## Cobertura por Vértices

- Dado um grafo não direcionado  $G = (V, E)$  uma cobertura por vértices de  $G$  é um subconjunto  $V' \subseteq V$  tal que para toda aresta  $(u, v) \in E$ , pelo menos um entre  $u$  e  $v$  deve estar em  $V'$ .
- Dizemos que um vértice em  $V'$  cobre todas as arestas adjacentes a ele. E em uma cobertura por vértices todas as arestas devem ser cobertas.
- O **tamanho** de uma cobertura por vértices é o número de vértices que contêm.



18 / 35

### Problema da Cobertura por Vértices - VERTEX-COVER

Dado um grafo não orientado  $G = (V, E)$ , e um inteiro  $k$  decidir se existe uma cobertura por vértices  $V' \subseteq V$  de tamanho  $k$ .

### Teorema

VERTEX-COVER é NP-completo

### Lema

VERTEX-COVER  $\in$  NP

- Utilizando a própria cobertura  $V'$  como certificado, podemos verificar facilmente, em tempo polinomial, se  $|V'| = k$  e se toda aresta  $(u, v)$ ,  $u$  ou  $v$  está em  $V'$ .

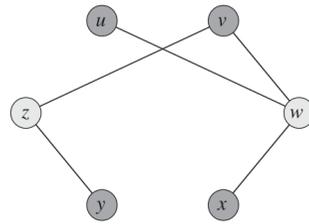
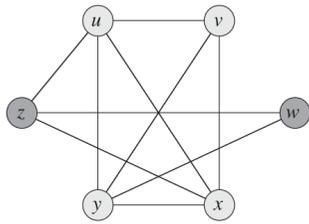
19 / 35

### Lema

VERTEX-COVER  $\in$  NP-Difícil

- Vamos mostrar que  $\text{CLICK} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .
- Definição: O **Complemento** de um grafo  $G = (V, E)$  denotado por  $\overline{G} = (V, \overline{E})$ , em que,  $\overline{E} = \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}$ . Ou seja, o complemento de  $G$  é um grafo com os mesmos vértices e exatamente as arestas que não estão em  $G$ .
- A redução consiste em dada uma entrada  $\langle G, k \rangle$  do problema da CLICK. Calcular o complemento  $\overline{G}$ , o que pode ser feito em tempo polinomial.
- E então usar  $\overline{G}$  como entrada para o problema do VERTEX-COVER, procurando uma cobertura de tamanho  $|V| - k$ .

20 / 35



**Lema**  
 $G$  tem uma CLICK de tamanho  $k$ , se e somente se,  $\bar{G}$  tem uma cobertura por vértices de tamanho  $|V| - k$

- ( $\rightarrow$ ) Se  $G$  tem uma CLICK  $C$  com  $k$  vértices, então  $V \setminus C$  é uma cobertura em  $\bar{G}$ .
- Seja  $(u, v)$  qualquer aresta em  $\bar{E}$ , então  $(u, v)$  não está em  $G$  e portanto  $u$  e  $v$  não podem estar em  $C$  simultaneamente.
- Logo, pelo menos um deles está em  $V \setminus C$  e portanto  $(u, v)$  está coberta.
- ( $\leftarrow$ ) Se  $\bar{G}$  tem uma cobertura por vértices  $V' \subseteq V$  em que  $|V'| = |V| - k$ , então para todo  $u, v \in V$  se  $(u, v) \in \bar{E}$  então ou  $u \in V'$  ou  $v \in V'$  ou ambos. Pela contrapositiva se nenhum dos dois está em  $V'$  significa que  $(u, v)$  está em  $E$  e portanto  $V - V'$  é uma CLICK, e tem tamanho  $|V| - |V'| = k$
- Portanto mostramos um redução  $CLICK \leq_p VERTEX-COVER$ . □

## O Problema do Ciclo Hamiltoniano

- Definição: Um **ciclo hamiltoniano** de um grafo é um circuito que passa exatamente uma vez por todos os vértices.

**Problema do Ciclo Hamiltoniano - HAM-CYCLE**  
 Dado um grafo não orientado  $G = (V, E)$ , decidir se  $G$  tem um ciclo hamiltoniano.

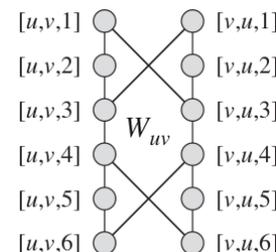
**Teorema**  
 $HAM-CYCLE$  é NP-completo

**Lema**  
 $HAM-CYCLE \in NP$

Prova: Exercício

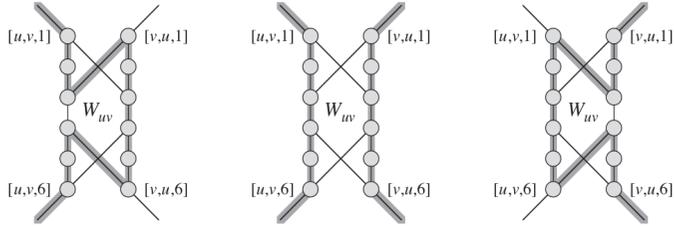
**Lema**  
 $HAM-CYCLE \in NP$ -Difícil

- Mostraremos que  $VERTEX-COVER \leq_p HAM-CYCLE$ .
- Dado um grafo não dirigido  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ , construiremos um grafo não dirigido  $G' = (V', E')$  que tem um ciclo hamiltoniano, se e somente se,  $G$  tem uma cobertura por vértices de tamanho  $k$ .
- A construção de  $G'$  se baseia em uma **engenhoca (widget)** que é um pedaço de um grafo que impõe certas propriedades.



- Para cada aresta  $(u, v) \in E$  o nosso grafo  $G'$  conterá uma cópia da engenhoca. Que denotaremos por  $W_{uv}$ .
- Cada vértice  $W_{uv}$  tem um nome e ao total ele tem 14 arestas.
- Para a engenhoca funcionar como queremos, ela vai se conectar ao resto do grafo apenas pelos vértices  $[u, v, 1], [u, v, 6], [v, u, 1]$  e  $[v, u, 6]$

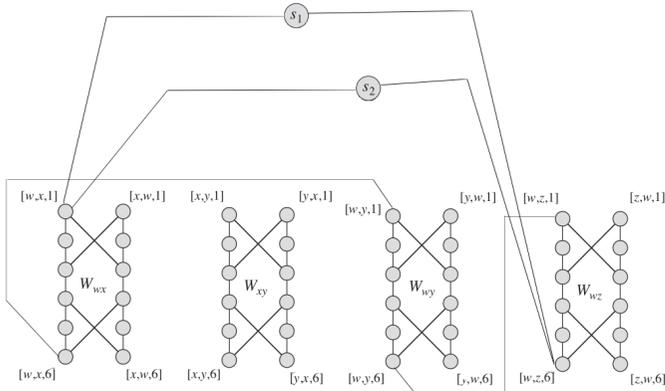
- Só existem três formas de um caminho entrar na engenhoca, passar por todos os vértices e sair.



- Em particular é impossível construir dois caminhos disjuntos nos vértices, um que ligue  $[u, v, 1]$  a  $[v, u, 6]$  e outro que ligue  $[v, u, 1]$  a  $[u, v, 6]$ .
- Além das engenhocas serão adicionados  $k$  vértices seletores  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Usaremos as arestas que incidem nesses vértices para selecionar os  $k$  vértices que formarão a cobertura por vértices em  $G$ .

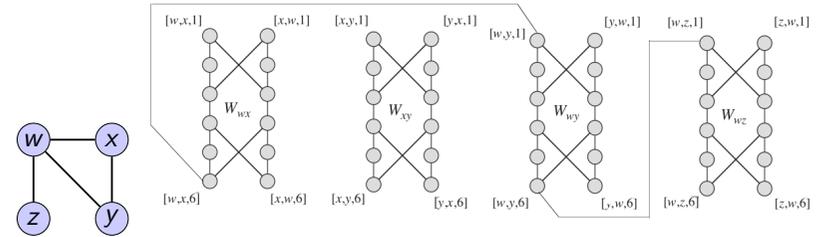
25 / 35

- O último tipo de aresta em  $E'$  une os vértices  $[u, v_1, 1]$  e  $[u, v_{grau(u)}, 6]$  a cada um dos seletores.



27 / 35

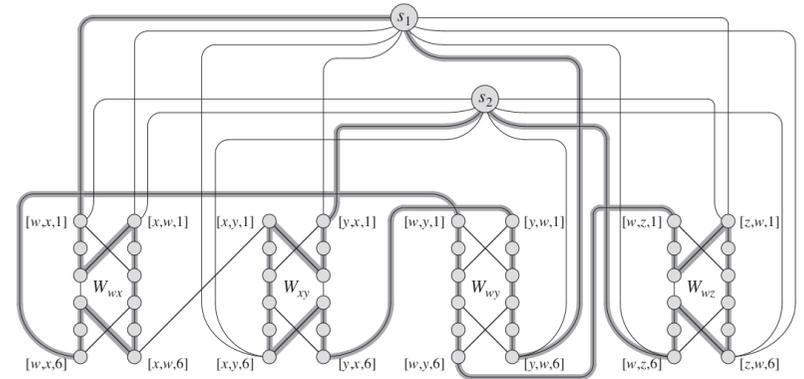
- Posteriormente para cada vértice  $u \in V$  adicionamos arestas que criam um caminho em  $G'$  que passam por todas as engenhocas que correspondem a arestas incidentes a  $u$ .
- Ordenamos arbitrariamente os vértices adjacentes a  $u$ . E dada a ordenação  $(v_1, v_2, v_{grau(u)})$ , conectamos  $[u, v_i, 6]$  com  $[u, v_{i+1}, 1]$ .
- No exemplo a seguir,  $w$  é vizinho de  $x, y$  e  $z$  (considerando essa ordem).



- A intuição é que se escolhermos um vértice  $u$  para a nossa cobertura, podemos fazer um caminho que passa por todas as engenhocas que correspondem as arestas adjacentes a  $u$ .

26 / 35

- Fazendo esse mesmo procedimento para todos os vértices obtemos o seguinte grafo, que é grande mas ainda é polinomial.



28 / 35

- Com 12 vértices por engenhoca, mais  $k \leq |V|$  vértices seletores, em um total de

$$\begin{aligned} |V'| &= 12|E| + k \\ &\leq 12|E| + |V| \end{aligned}$$

- Para cada vértice  $u \in V$  temos  $\text{grau}(u) - 1$  arestas entre as engenhocas, em um total de

$$\sum_{u \in V} (\text{grau}(u) - 1) = 2|E| - |V|$$

- Cada engenhoca tem 14 arestas, além das arestas entre os vértices seletores, no total

$$\begin{aligned} |E'| &= (14|E|) + (2|E| - |V|) + (2k|V|) \\ &= 16|E| + (2k - 1)|V| \\ &\leq 16|E| + (2|V| - 1)|V| \end{aligned}$$

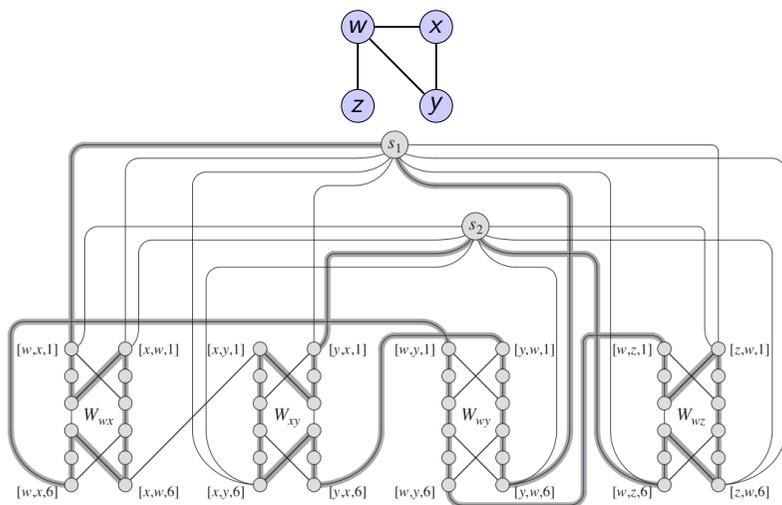
29 / 35

### Lema

$G$  tem uma cobertura por vértices de tamanho  $k$ , se e somente se,  $G'$  tem um caminho hamiltoniano.

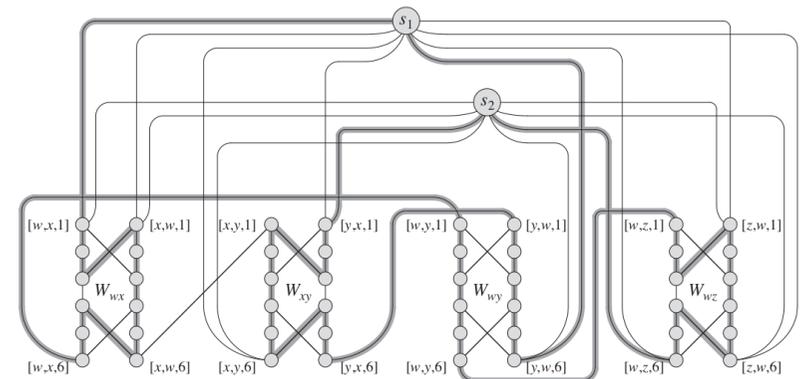
- ( $\rightarrow$ ) Suponha que  $G = (V, E)$  tem uma cobertura por vértices  $V' \subseteq V$  de tamanho  $k$ .
- Para cada vértice  $u \in V'$  com os vizinhos  $(v_1, v_2, \dots, v_{\text{grau}(u)})$ , adicionamos no caminho as arestas que ligam as engenhocas.
- Além disso ligamos os vértices internos da engenhoca dependendo se a aresta é coberta por um ou por dois vértices.
- No exemplo se  $k = 2$ , temos uma cobertura formada por  $w$  e  $y$ .

30 / 35



31 / 35

- Também incluímos as arestas com os vértices seletores da seguinte forma. Considere uma ordenação  $(u_1, \dots, u_k)$  qualquer dos vértices da cobertura. Conectamos o seletor  $s_i$  com o início do caminho formado por  $u_i$ , além disso ligamos o final do caminho ao próximo seletor  $s_{i+1}$ , por fim ligamos o final do caminho de  $u_k$  com o primeiro seletor, fechando o ciclo.

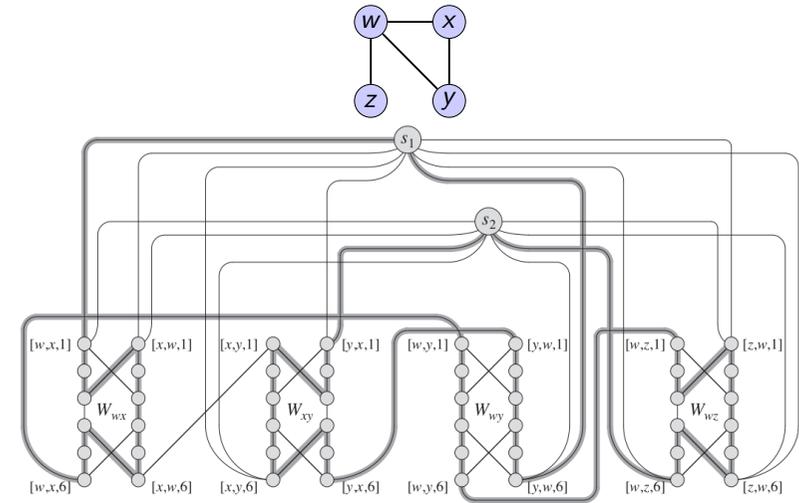


32 / 35

- Como a cobertura por vértices incide em todas as aresta, todas as engenhocas serão visitadas (uma ou duas vezes), assim como os vértices seletores. E portanto formamos um ciclo hamiltoniano.
- ( $\leftarrow$ ) Suponha que  $G' = (V', E')$  tem um ciclo hamiltoniano  $C \subseteq E'$ . Afirmamos que o conjunto

$$V' = \{u \in V : (s_j, [u, v, 1]) \in C \text{ para algum } 1 \leq j \leq k\}$$

- é uma cobertura por vértices para  $G$ .
- Como o caminho que sai de um seletor passa pelas engenhocas até chegar em algum seletor (já que é um ciclo hamiltoniano).
- Pela forma como  $G'$  foi construído, os vértices internos de cada engenhoca  $W_{uv}$  só podem ser visitados se o caminho teve início em  $u$  ou  $v$ , e portanto este estará na cobertura por vértices.



33 / 35

34 / 35

Resumindo:

- Mostramos que HAM-CYCLE  $\in$  NP
- Mostramos que HAM-CYCLE  $\in$  NP-Difícil
  - ▶ Mostrando uma redução de qualquer instância do VERTEX-COVER para HAM-CYCLE
  - ▶ Essa redução é de tempo polinomial
  - ▶ Essa redução é correta, ou seja a instância do VERTEX-COVER decide sim se e somente se a instância do HAM-CYCLE decide sim.
- Portanto demonstramos que HAM-CYCLE  $\in$  NP-Completo.  $\square$

35 / 35