

## Algoritmos

Pedro Hokama

- [cirs] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
  - [timr] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
  - Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
  - Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
  - Stanford Algorithms  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V>  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6>
  - Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
  - Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420
- Qualquer erro é de minha responsabilidade.

1 / 24

2 / 24

## Princípios da Análise de Algoritmos

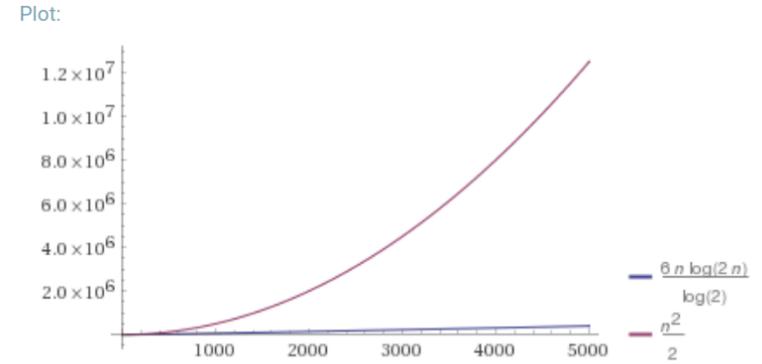
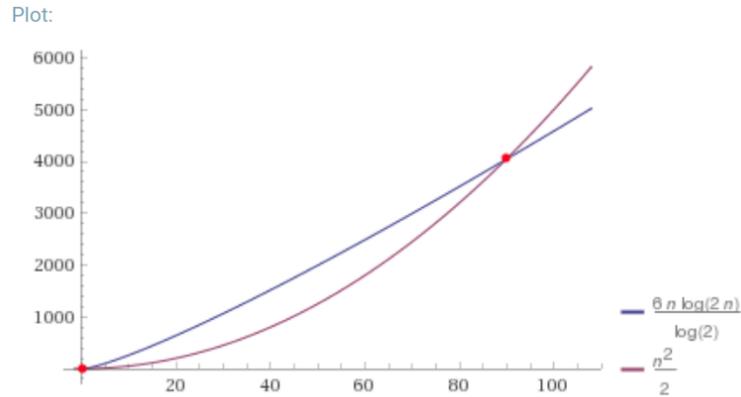
- O que fizemos no caso do MergeSort foi uma análise de Pior Caso, ou seja, qualquer que seja a entrada sabemos que o algoritmo executaram em tempo  $\leq 6n \log_2 n + 6n$ .
- Esse limite também é aplicado se um adversário tentasse atribuir números de forma a deixar o algoritmo lento.
- Essa análise é particularmente interessante por não precisar entender a aplicação do problema, padrões de entrada e ela é usualmente mais útil e mais fácil que as alternativas:
  - ▶ Análise de Caso Médio (Exige assumir alguma distribuição da entrada, ter conhecimento do domínio, mais difícil de ser feita)
  - ▶ Desempenho em *Benchmarks*
  - ▶ Análise de Melhor Caso (inútil na maior parte do tempo)

3 / 24

## Princípios da Análise de Algoritmos

- Iremos fazer uma Análise **Assintótica** dos algoritmos, o que significa que estamos interessados no comportamento deles para instâncias **grandes**.
- Isso nos permite dizer que um algoritmo é mais rápido que outro assumindo que o tamanho  $n$  da instância é suficientemente grande.
- Por exemplo, podemos dizer com segurança que um algoritmo que executa em  $6n \log_2 n + 6n$  é mais rápido que um que executa em  $\frac{1}{2}n^2$
- Note que isso pode não ser verdade para  $n$  pequeno, mas a partir de algum  $n = n_0$  sempre será verdade.
- De fato, para  $n$  pequeno, tanto faz o algoritmo que você use. Estamos interessados em resolver problemas grandes!

4 / 24



- Você poderia imaginar que com o avanço dos hardwares, bastaria eu usar um computador melhor.
- Na verdade quanto maior o poder computacional, MAIOR é a disparidade entre algoritmos eficientes.
- Podemos pensar no tamanho do problema que podemos resolver com computadores mais potentes usando diferentes algoritmos.
- Suponha que você tem dois algoritmos para um problema.

Algoritmo A	Algoritmo B
$n$	$n^2$

- Suponha que você fez um grande investimento e comprou um computador 4 vezes mais potente. Com o algoritmo A você pode resolver um problema 4 vezes maior, enquanto com o algoritmo B você só pode resolver um problema 2 vezes maior.

- É a linguagem que os cientistas da computação (sérios) usam para discutir o desempenho em alto nível de algoritmos.
- É fundamental para o vocabulário do cientista da computação. Quando alguém diz “O MergeSort executa em  $\Theta(n \log n)$ , e o InsertionSort executa em  $o(n^2)$ ” o que exatamente ele está dizendo?
- A análise assintótica é uma ferramenta adequada pois:
  - ▶ É simples o bastante para suprimir detalhes de arquitetura/linguagem/compilador.
  - ▶ Mas é complexa o bastante para permitir a comparação entre diferentes algoritmos, especialmente em instâncias grandes.

## Análise Assintótica

### Ideia geral

Suprimir fatores constantes e termos de ordens inferiores.

- Por exemplo em:

$$6n \log_2 n + 6n$$

$6n$  é um termo de ordem inferior, 6 é constante então resultaria em:

$$n \log n$$

Exercício: A base do log também não importa. Por que?

- Então quando dizemos que o tempo de execução do MergeSort é  $O(n \log n)$ , ou de maneira geral quando dizemos que um algoritmo é  $O(f(n))$ . Estamos dizendo que depois de eliminar os termos de ordem inferior e constantes acabamos apenas com  $f(n)$ .

9 / 24

## Exemplos

Exemplo de um laço

### Algoritmo 1: Procura

**Entrada:** Um vetor  $A$  de tamanho  $n$  e um inteiro  $t$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  contém  $t$ , Falso caso contrário

- 1 para  $k$  de 1 até  $n$  faça
- 2 se  $A[k] == t$  então
- 3 devolva Verdadeiro;
- 4 devolva Falso;

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

- O tempo de execução do exemplo depende por exemplo se  $t$  está ou não em  $A$ , e se  $t$  estiver na primeira posição? Estamos interessados no pior caso!
- Quantas operações estamos fazendo nas linhas 1 e 2? Uma, duas, três? Isso é constante e é suprimido pela notação  $O$ .

11 / 24

## Análise assintótica de funções quadráticas - termos de menor ordem

Considere a função quadrática  $3n^2 + 10n + 50$ :

$n$	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

- Como se vê,  $3n^2$  é o termo dominante quando  $n$  é grande.
- De um modo geral, podemos nos concentrar nos termos dominantes e esquecer os demais.

10 / 24

## Exemplos

Exemplo de dois laços consecutivos

### Algoritmo 2: Procura2

**Entrada:** Dois vetores  $A$  e  $B$  de tamanho  $n$  e um inteiro  $t$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  ou  $B$  contém  $t$ , Falso caso contrário

- 1 para  $k$  de 1 até  $n$  faça
- 2 se  $A[k] == t$  então devolva Verdadeiro;
- 3 para  $k$  de 1 até  $n$  faça
- 4 se  $B[k] == t$  então devolva Verdadeiro;
- 5 devolva Falso;

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

- Evidentemente, nesse problema a entrada é na verdade de tamanho  $2n$ , então o algoritmo não seria  $O(2n)$ ? Essa constante é suprimida na notação  $O$ .

12 / 24

## Exemplos

Exemplo de dois laços aninhados

### Algoritmo 3: ProcuraComum

**Entrada:** Dois vetores  $A$  e  $B$  de tamanho  $n$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  ou  $B$  têm um número em comum, Falso caso contrário

```
1 para  $j$  de 1 até  $n$  faça
2   para  $k$  de 1 até  $n$  faça
3     se  $A[j] == B[k]$  então devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

- Pior caso ✓. Constantes ✓.
- Nesse caso se o tamanho dos vetores dobrar, o tempo de execução quadruplica!

13 / 24

## Notação O

- Big Oh, Ózão, O grande.
- Notação O é utilizada em funções definidas nos inteiros positivos.
- Seja  $T(n)$  uma função sobre  $n = 1, 2, 3, \dots$
- $T(n) : \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
- Pergunta: Quando podemos dizer que  $T(n) = O(f(n))$ ?
- Resposta: Se eventualmente, para um  $n$  suficientemente grande,  $T(n)$  é limitado superiormente por uma alguma constante vezes  $f(n)$ .

15 / 24

Exemplo de dois laços aninhados

### Algoritmo 4: ProcuraComum

**Entrada:** Um vetor  $A$  de tamanho  $n$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  tem números duplicados, Falso caso contrário

```
1 para  $j$  de 1 até  $n$  faça
2   para  $k$  de  $j + 1$  até  $n$  faça
3     se  $A[j] == A[k]$  então devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

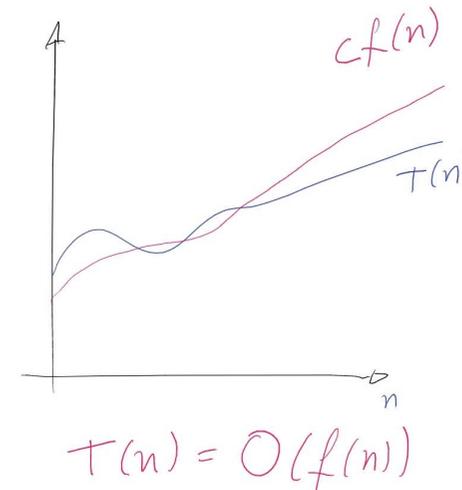
- Dessa vez, obviamente, procuramos no vetor  $A$  ao invés de  $B$ .
- Ao invés de olhar todas combinações de  $j$  e  $k$ , olhamos apenas aquelas em que  $k \geq j + 1$ .
- Isso é válido pois comparar, por exemplo, o primeiro com o terceiro elemento é a mesma coisa que comparar o terceiro com o primeiro. Então diminuimos nossas comparações pela metade!

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

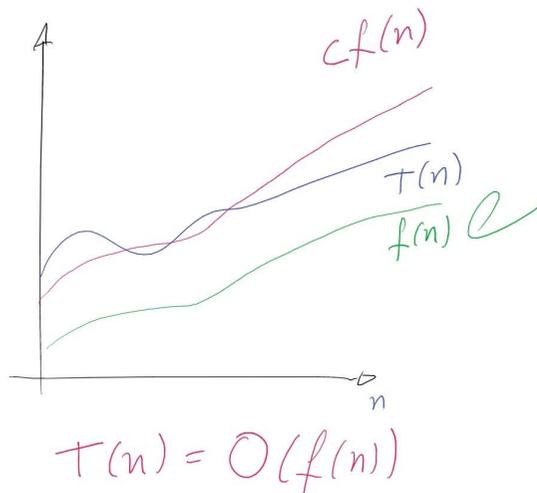
Exercício: É possível fazer esse algoritmo mais eficiente? Como?

14 / 24



- $T(n) = O(f(n))$  se quanto multiplicado por alguma constante  $c$  tal que  $c \cdot f(n)$  está sempre acima de  $T(n)$

16 / 24



- É válido mesmo se  $f(n)$  ou  $c \cdot f(n)$  esteja sempre abaixo de  $T(n)$ , o importante é existir uma constante que a deixe sempre acima.

17 / 24

## Exemplo

### Teorema

Se  $T(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$  então  $T(n) = O(n^k)$

- Para provar precisamos exigir constantes  $c$  e  $n_0 > 0$  tais que  $T(n) \leq c \cdot f(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .
- Vamos então escolher  $n_0 = 1$  e  $c = |a_k| + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$ .

$$\begin{aligned}
 T(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \\
 &\leq |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \dots + |a_1| n + |a_0| \\
 &\leq |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^k + \dots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \quad (\text{vál. para } n > n_0) \\
 &= (|a_k| + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) n^k \\
 &= c n^k
 \end{aligned}$$

portanto,  $T(n) \leq c n^k$  logo,  $T(n) = O(n^k)$   $\square$

19 / 24

## Formalizando o $O$

### Definição

$T(n) = O(f(n))$  se e somente se existem constantes  $c, n_0 > 0$  tais que

$$T(n) \leq c \cdot f(n)$$

para todo  $n \geq n_0$ .

- Então para provar que  $T(n) = O(f(n))$  você precisa exibir  $c$  e  $n_0$  que provem que  $T(n) \leq c \cdot f(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .
- Dizer que  $c$  e  $n_0$  são constantes, significa que não dependem de  $n$ . (Tudo bem se  $c$  depender de  $n_0$  e vice versa).
- (muito) Formalmente  $O(f(n))$  é um conjunto de funções que podem ser limitadas por  $f(n)$ , então o correto seria dizer que  $T(n) \in O(f(n))$ . Mas dizer que  $T(n) = O(f(n))$  é um abuso de notação comumente aceito e que facilita a manipulação dessas funções.

18 / 24

### Teorema

Para todo  $k \geq 1$ ,  $n^k$  não é  $O(n^{k-1})$ .

- Podemos provar por contradição, ou seja, assumimos que a premissa é verdadeira porém a conclusão é falsa e chegamos a algum absurdo.
- Supomos que existe um  $k \geq 1$  e constantes  $c, n_0 > 0$  tal que  $n^k = O(n^{k-1})$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 n^k &\leq c n^{k-1} & \forall n \geq n_0 \\
 n n^{k-1} &\leq c n^{k-1} & \forall n \geq n_0 \\
 n \cancel{n^{k-1}} &\leq c \cancel{n^{k-1}} & \forall n \geq n_0 \\
 n &\leq c & \forall n \geq n_0
 \end{aligned}$$

Como  $n$  pode ser todos os naturais maiores do que  $n_0$ , não pode existir tal constante  $c$  que seja maior do que qualquer natural. Portanto chegamos a um absurdo e provamos que todo  $k \geq 1$ ,  $n^k$  não é  $O(n^{k-1})$ .  $\square$

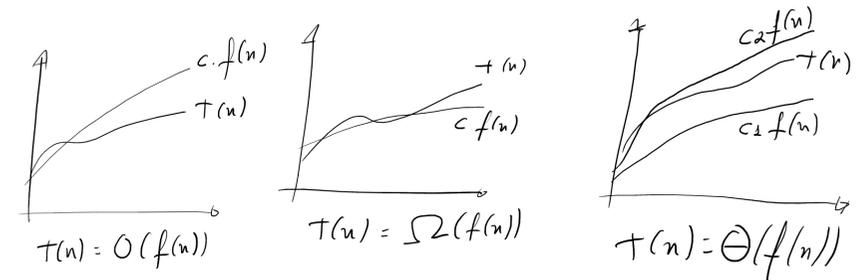
20 / 24

Analogia

- Intuitivamente, você pode comparar a notação  $O$  com uma relação de  $\leq$ . Já que dizer que  $T(n)$  ser  $O(f(n))$ , quer dizer que: (existe constante  $c$  e  $n_0$  tal que para todo  $n$  maior que  $n_0$ )

$$T(n) \leq cf(n)$$

- Nessa comparação a notação  $\Omega$  seria como uma relação de  $\geq$
- E a notação  $\Theta$  seria como uma relação de  $=$



A notação  $\Omega$  que define um limitante inferior. Formalmente:

Definição

$T(n) = \Omega(f(n))$  se e somente se existem constantes  $c, n_0 > 0$  tais que

$$T(n) \geq c.f(n)$$

para todo  $n \geq n_0$ .

A notação  $\Theta$  indica que uma função  $T(n)$  é limitada inferiormente e superiormente por uma função  $f(n)$ . Formalmente:

Definição

$T(n) = \Theta(f(n))$  se e somente se existem constantes  $c_1, c_2$  e  $n_0 > 0$  tais que

$$c_1.f(n) \leq T(n) \leq c_2.f(n)$$

para todo  $n \geq n_0$ .

Definição

$T(n) = \Theta(f(n))$  se e somente se  $T(n) = O(f(n))$  e também se  $T(n) = \Omega(f(n))$ .