Fontes

Matemática Discreta

Pedro Hokama

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/46

2/46

Lógica Proposicional

Lógica matemática

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que ou é verdadeira ou é falsa.
Exemplos:

- 1 O morcego é um mamífero.
- 2 Rio de Janeiro é a capital do Brasil.
- 3 Há 36 macacos no zoológico de Londres.
- 4 A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã.
- 5 O trilionésimo algarismo decimal de π é 7.

3/46

4/46

Lógica Proposicional

Não é necessário que saibamos se a sentença é verdadeira ou falsa.

- 1 Este fato pode depender de informações que não temos no momento: **Há 36 macacos no zoológico de Londres.**
- 2 de eventos que ainda não aconteceram: **A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã.**
- 3 ou de cálculos que não temos recursos para realizar: **O trilionésimo algarismo decimal de π é 7.**

5/46

Lógica Proposicional

Uma sentença declarativa que depende de variáveis pode ser considerada uma proposição em um contexto onde as variáveis tem valor determinado.

- “**x é menor que 3**” isoladamente não é uma proposição.
- se x for definido, ela se torna uma proposição.

7/46

Lógica Proposicional

Não são proposições:

- 1 frases interrogativas, como “**O que é isto?**”,
- 2 frases imperativas, como “**Leia com cuidado**”,
- 3 certas sentenças auto referentes, como “**Esta frase é falsa**”.

6/46

Lógica Proposicional

Uma sentença declarativa que depende de variáveis pode ser considerada uma proposição em um contexto onde as variáveis tem valor determinado.

- “**x é menor que 3**” isoladamente não é uma proposição.
- se x for definido, ela se torna uma proposição.

Dizemos que o **valor lógico** ou **valor-verdade** de uma proposição é **verdadeiro** se ela for verdadeira, e **falso** caso contrário.

7/46

Todas as línguas naturais possuem **conectivos lógicos**, como “e”, “ou”, “não”, “se . . . então”, que permitem combinar proposições simples para formar proposições mais complexas. Por exemplo,

- ① [Brasília é a capital do Brasil,] e [Montevidéu é a capital da Argentina].
- ② [Brasília é a capital do Brasil,] ou [Montevidéu é a capital da Argentina].
- ③ Se [a taxa de juros cair amanhã], então [a inflação vai aumentar neste mês].
- ④ Não [haverá sessão da meia-noite hoje neste cinema].

8/46

8/46

- Uma proposição que não pode ser decomposta em proposições menores ligadas por conectivos lógicos é dita uma **proposição simples** ou **atômica**.
- O valor lógico (**verdadeiro** ou **falso**) de uma proposição deste tipo depende do valor lógico das proposições simples que a compõem, e da maneira como elas são combinadas pelos conectivos.

- se sabemos que a proposição “**Brasília é a capital do Brasil**” é verdadeira,
- e “**Montevidéu é a capital da Argentina**” é falsa,
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] e [**Montevidéu é a capital da Argentina**].

9/46

10/46

- se sabemos que a proposição “**Brasília é a capital do Brasil**” é verdadeira,
- e “**Montevideú é a capital da Argentina**” é falsa,
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] e [**Montevideú é a capital da Argentina**]. É falsa.
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] ou [**Montevideú é a capital da Argentina**].

10/46

Notação para cálculo proposicional

Lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**: Permite determinar o valor lógico de proposições compostas, se soubermos os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

11/46

- se sabemos que a proposição “**Brasília é a capital do Brasil**” é verdadeira,
- e “**Montevideú é a capital da Argentina**” é falsa,
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] e [**Montevideú é a capital da Argentina**]. É falsa.
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] ou [**Montevideú é a capital da Argentina**]. É verdadeira.

10/46

Notação para cálculo proposicional

Lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**: Permite determinar o valor lógico de proposições compostas, se soubermos os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Pare **eliminar as ambiguidades** das linguagens naturais iremos usar uma **notação algébrica**.

11/46

Notação para cálculo proposicional

Proposições serão representadas por letras minúsculas ($p, q, r, \dots$).

Podem ter dois valores:

V representando verdadeiro e **F** representando falso.

12/46

Notação para cálculo proposicional

Proposições serão representadas por letras minúsculas ($p, q, r, \dots$).

Podem ter dois valores:

12/46

Notação para cálculo proposicional

Proposições serão representadas por letras minúsculas ($p, q, r, \dots$).

Podem ter dois valores:

V representando verdadeiro e **F** representando falso.

12/46

Notação para cálculo proposicional

Os conectivos lógicos serão representados por sinais algébricos especiais (**operadores**) aplicados a essas variáveis. Os mais importantes são:

- **conjunção**: $p \wedge q$, significando “ p e q ”.
- **disjunção**: $p \vee q$, significando “ p ou q ”.
- **negação**: $\neg p$, significando “não p ”.
- **implicação**: $p \rightarrow q$, significando “se p , então q ”.
- **equivalência**: $p \leftrightarrow q$, significando “ p se, e somente se, q ”.

13/46

Operador de conjunção

Operador de conjunção

Se p , q são duas proposições, então “ p e q ”, denotado por $p \wedge q$ também é uma proposição, chamada **conjunção** de p e q .

14/46

14/46

Operador de conjunção

Operador de conjunção

Se p , q são duas proposições, então “ p e q ”, denotado por $p \wedge q$ também é uma proposição, chamada **conjunção** de p e q . $p \wedge q$ é verdadeiro se p e q forem verdadeiros.

Se p , q são duas proposições, então “ p e q ”, denotado por $p \wedge q$ também é uma proposição, chamada **conjunção** de p e q . $p \wedge q$ é verdadeiro se p e q forem verdadeiros.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

14/46

14/46

Operador de conjunção

Operador de conjunção

A frase “José compra tijolos e vende casas” é uma conjunção de duas proposições atômicas, “(José compra tijolos) $\wedge$ (José vende casas).”

15/46

15/46

Operador de conjunção

Operador de conjunção

A palavra “e” em português tem vários sentidos diferentes.

A palavra “e” em português tem vários sentidos diferentes.

“Maria gosta de arroz e feijão”

16/46

16/46

Operador de conjunção

A palavra “e” em português tem vários sentidos diferentes.

“Maria gosta de arroz e feijão”

Não significa “(Maria gosta de arroz) e (Maria gosta de feijão)”

Operador de conjunção

A palavra “e” em português tem vários sentidos diferentes.

“Maria gosta de arroz e feijão”

Não significa “(Maria gosta de arroz) e (Maria gosta de feijão)”

Mas sim “Maria gosta de arroz misturado com feijão” (uma proposição atômica).

16/46

16/46

Operador de disjunção

Se p , q são duas proposições, então “ p ou q ” também é uma proposição, chamada de **disjunção** de p e q .

$$p \vee q$$

É Verdadeiro se pelo menos uma das duas proposições for verdadeira. Se ambas forem falsa $p \vee q$ é falso.

Operador de disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

17/46

18/46

Operador de disjunção

A frase “O cliente tem celular ou laptop” é uma disjunção de duas proposições atômicas, “(O cliente tem celular) $\vee$ (O cliente tem laptop)”.

Este conectivo é também chamado de “ou inclusivo”.

19 / 46

Exercício

Uma proposição composta é **viável** ou **possível** se existe uma atribuição de valores verdades para as variáveis da proposição que a torna verdadeira. Verifique quais das proposições abaixo são viáveis.

a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$.

21 / 46

Operador de negação

A partir de uma proposição p , podemos formar uma nova proposição com o valor lógico oposto ao de p .

Essa nova proposição é chamada a **negação** de p e denotada por $\neg p$.

p	$\neg p$
V	F
F	V

A frase “A casa é de qualquer cor menos branca.” é uma negação, “ $\neg$ (A casa é branca).”

20 / 46

Exercício

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$.

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$.

22 / 46

Operador de implicação

Sejam p, q duas proposições. A proposição “se p então q ”, que denotaremos por $p \rightarrow q$, é chamada de **implicação** ou **condicional**.

O valor lógico de $p \rightarrow q$ é falso apenas se p for verdadeiro e q for falso. Nos demais casos, o valor de $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

23 / 46

24 / 46

Operador de implicação

Em lógica, este conectivo não pressupõe uma relação causal entre p e q .

Por exemplo a sentença:

“se 2 é par então Brasília é a capital do Brasil” é verdadeira apesar de não haver nenhuma relação conhecida entre os dois fatos.

Uma outra notação usada para este operador é $p \Rightarrow q$.

Operador de implicação

A frase “se José foi para casa, ele perdeu a reunião” contém uma implicação: “(José foi para casa) $\rightarrow$ (José perdeu a reunião).”

25 / 46

26 / 46

Operador de implicação

Muitos teoremas em matemática estão na forma de implicações:

Se determinada afirmação p (a **hipótese**, **premissa**, ou **antecedente**) é verdadeira, então outra afirmação q (a **tese**, **conclusão** ou **consequência**) também é verdadeira.

27 / 46

Operador de implicação

Em português, a implicação pode ser expressa de muitas outras formas:

- se p então q .
- quando p , temos q .
- caso p , vale q .
- q segue de p .
- p implica q .
- q se p .
- q sempre que p .

28 / 46

Operador de implicação

Em matemática, as seguintes expressões também são muito usadas para indicar a implicação $p \rightarrow q$:

- p é condição suficiente para q .
- p somente se q .
- Uma condição suficiente para q é p .
- p é uma condição mais forte que q .

29 / 46

Operador de implicação - Recíproca

Dizemos que a implicação

$$q \rightarrow p$$

é a **recíproca** de

$$p \rightarrow q.$$

Observe que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa.

30 / 46

Operador de implicação - Inversa

A proposição $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$ é chamada de **inversa** de $p \rightarrow q$. Observe que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua inversa é falsa; e vice-versa

31 / 46

Operador de implicação - Contrapositiva

Dizemos também que proposição

$$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$$

é a **contrapositiva** de

$$p \rightarrow q.$$

32 / 46

Operador de implicação - Contrapositiva

Dizemos também que proposição

$$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$$

é a **contrapositiva** de

$$p \rightarrow q.$$

A contrapositiva tem sempre o mesmo valor lógico que a proposição $p \rightarrow q$, quaisquer que sejam os valores lógicos de p e de q .

32 / 46

Operador de implicação - Contrapositiva

Em vista deste resultado, a implicação $p \rightarrow q$ é frequentemente enunciada na forma contrapositiva:

- se não q , então não p .
- se q não vale, então p não vale.
- quando q é falsa, p também é falsa.
- não q implica não p .
- não p se não q .
- p é falsa sempre que q é falsa.
- q é mais fraco que p .
- q é condição necessária para p .
- Uma condição necessária para p é q .

33 / 46

Exercício

Encontre:

- a) A contrapositiva de $\neg p \rightarrow q$.
- b) A recíproca de $\neg q \rightarrow p$.
- c) A inversa da recíproca de $q \rightarrow \neg p$.
- d) A negação de $p \rightarrow \neg q$.
- e) A recíproca de $\neg p \vee q$.

Operador de equivalência

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

34 / 46

Operador de equivalência

Se p, q são duas proposições, a proposição “ p se, e somente se, q ” é chamada de **equivalência** ou **bicondicional** de p e q .

$$p \leftrightarrow q$$

O valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro quando p e q tem o mesmo valor lógico, e falso caso contrário.

35 / 46

Operador de equivalência

A frase “a encomenda será enviada se, e somente se, o cheque tiver fundo” afirma uma equivalência lógica: “[a encomenda será enviada] $\leftrightarrow$ [o cheque tem fundo].”

Outros símbolos usados para este operador são $p \Leftrightarrow q$, $p \equiv q$, e $p = q$.

36 / 46

37 / 46

Operador de equivalência

O conectivo lógico “se e somente se” também é muito usado em matemática, e pode ser expresso de várias outras maneiras; como, por exemplo:

- p é condição necessária e suficiente para q .
- as condições p e q são equivalentes.
- se p então q , e se q então p .
- p implica q , e vice-versa.

Alguns autores usam a abreviação “ p sse q ” (com dois “s”) para significar “ p se e somente se q ”. (em inglês iff)

38 / 46

Operador de disjunção exclusiva

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

40 / 46

Operador de disjunção exclusiva

Se p , q são duas proposições, denotamos por $p \oplus q$ a proposição “ou p ou q , mas não ambos.” Este conectivo é chamado de **disjunção exclusiva** de p e q .

O valor lógico de $p \oplus q$ é verdadeiro se p e q tem valores lógicos opostos, ou seja, exatamente um deles é verdadeiro.

39 / 46

Operador de disjunção exclusiva

É importante observar que, em português, o conectivo “ou” pode significar tanto a disjunção inclusiva ($\vee$) quanto a disjunção exclusiva ($\oplus$).

“o original foi enviado pelo correio, ou pelo malote,”

“a bateria está descarregada ou o tanque está vazio”

41 / 46

Precedência dos operadores lógicos

Qual o valor lógico de:

$$p \vee q \wedge r$$

Podemos sempre usar parênteses para indicar a ordem correta, por exemplo $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$.

Operador	Precedência
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee, \oplus$	3
$\rightarrow, \leftrightarrow$	4

42 / 46

43 / 46

Precedência dos operadores lógicos

Associatividade

Em matemática, diz-se que uma operação $\star$ é **associativa** se $(x \star y) \star z$ é igual a $x \star (y \star z)$, quaisquer que sejam x , y , e z .

Nesse caso, podemos omitir os parênteses dessas duas fórmulas, e escrever simplesmente $x \star y \star z$.

A soma e a multiplicação de números reais, por exemplo, são operações associativas; enquanto que a subtração não é.

44 / 46

Precedência dos operadores lógicos

Dentre os conectivos lógicos que vimos até agora, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ e $\leftrightarrow$ são associativos. Portanto, podemos escrever $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$, ou $p \oplus q \oplus r$, ou $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$, sem risco de ambiguidade.

Por outro lado, a fórmula $p \rightarrow q \rightarrow r$ é ambígua, pois $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ não é equivalente a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

45 / 46

Precedência dos operadores lógicos

Normalmente avaliamos operadores de mesma precedência da esquerda para a direita. Porém é aconselhável sempre usar parênteses.

Note que esta convenção também é usada em álgebra: a fórmula $x - y - z$ deve ser entendida como $(x - y) - z$, e não como $x - (y - z)$. A mesma regra poderia ser usada para interpretar $p \oplus q \vee r$.