Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Indução Matemática

Indução Matemática

- Seja $P(n)$ uma sentença matemática que depende de uma variável natural n
- se torna verdadeira ou falsa quando substituimos n por um número natural dado qualquer
- Estas sentenças são chamadas **sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos números naturais** $\mathbb{N}$.

Indução Matemática

1. $P(n)$: "n é ímpar." Observe que esta afirmação é verdadeira para alguns valores de n e falsa para outros.
2. $P(n)$: "$n^2 - n + 41$ é um número primo." Neste exemplo podemos verificar, não tão facilmente, que $P(1), P(2), \ldots, P(40)$ são verdadeiros mas $P(41) = 41^2$ é falso.
3. $P(n)$: "$2n + 6$ é par." É fácil ver que $2n + 6 = 2(n + 3)$ para qualquer n, portanto $P(n)$ é verdade para todo n.
4. $P(n)$: "$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$." Será que conseguiremos encontrar algum m tal que $P(m)$ seja falso?

Indução Matemática

Como mostrar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

é verdade para qualquer n?

Princípio de Indução Matemática

O **princípio da indução matemática** (PIM) é a principal ferramenta para demonstrar sentenças da forma "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$". Ele diz o seguinte:

Axioma: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

1. $P(0)$ é verdade, e
2. Sempre que $P(k)$ é verdade, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $P(k + 1)$ é verdade.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Princípio de Indução Matemática

Para demonstrar uma afirmação "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$" usando o PIM, podemos então seguir este roteiro:

- **Base da Indução**: Provar que $P(0)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução**: Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ é verdade.
- **Passo da Indução**: Provar que $P(k + 1)$ é verdade.

Exemplo

Provar que, para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = (n)^2$$

Prova: Vamos provar usando indução em n.

- **Base**: $P(0)$ é verdade pois a expressão acima é trivialmente válida para $n = 0$.
- **Hipótese de indução**: suponhamos que para algum k, $P(k)$ é verdade, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = (k)^2$$

.

Exemplo - cont

Passo de indução: temos de provar que $P(k+1)$ é verdade, isto é temos que provar que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + (2(k+1) - 1) &= \\ [k^2] + (2(k+1) - 1) &= \\ k^2 + 2k + 2 - 1 &= \\ k^2 + 2k + 1 &= \\ (k+1)^2 & \end{aligned}$$

Exemplo 2

Definição: Dizemos que um conjunto de n retas no plano **estão em posição geral** se não possui duas retas paralelas e nem três retas se interceptando num mesmo ponto.

Teorema

Um conjunto de n retas em posição geral divide o plano em $R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ regiões.

Vamos provar por indução no número n retas de retas.

- **Base**: Para $n = 0$ temos apenas uma região. Como $R_0 = 0(0+1)/2 + 1 = 1$, a fórmula é válida neste caso.
- **Hipótese de indução**: Suponhamos que para algum k a fórmula é válida, isto é quaisquer k retas em posição geral dividem o plano em $R_k = k(k+1)/2 + 1$ regiões.

Passo da indução: temos que provar que quaisquer $k+1$ retas em posição geral definem $R_{k+1} = (k+1)(k+2)/2 + 1$ regiões.
Sejam $L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}$ essas retas. Compare as regiões do plano definidas por elas, que chamaremos de **regiões novas**, com as **regiões velhas** definidas pelas primeiras k dessas retas. Observe que algumas das regiões velhas são divididas pela última reta L_{k+1}, cada uma delas formando duas regiões novas; enquanto que as demais regiões velhas são também regiões novas.

Como as retas estão em posição geral, a reta L_{k+1} cruza cada uma das k retas anteriores em k pontos distintos. Em cada um desses cruzamentos, a reta L_{k+1} passa de uma região velha para outra. Essas regiões são duas a duas distintas porque estão em lados opostos de alguma reta L_i, com $1 \leq i \leq k$. Portanto a reta L_{k+1} corta $k+1$ regiões velhas, que dão origem a $2(k+1)$ regiões novas. Ou seja,

$$R_{k+1} = R_k - (k+1) + 2(k+1) = R_k + (k+1)$$

Como as retas $L_1, L_2, \ldots, L_k$ estão em posição geral, podemos usar a hipótese de indução. Obtemos

$$R_k + (k+1) = k(k+1)/2 + 1 + k + 1 =$$

$$(k+1)(k+2)/2 + 1.$$

Generalizações da Indução Matemática

Há muitas variações do princípio da indução matemática, que são no fundo equivalentes, mas podem tornar algumas demonstrações mais simples.
Muitas vezes precisamos provar que uma sentença aberta $P(n)$ vale para todos os números naturais maiores ou iguais a um certo n_0; ou seja, que "$(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \rightarrow P(n)$".

Generalizações da Indução Matemática

Por exemplo, a afirmação $n^2 > 3n$ é verdadeira para todo natural n maior ou igual a 4, embora não seja verdadeira se n for 0, 1, 2 ou 3.
Podemos usar o PIM para provar esse tipo de afirmação, de maneira indireta. Primeiro definimos um outro predicado $Q(m)$ como sendo equivalente a $P(n_0 + m)$. Provamos então a afirmação $(\forall m \in \mathbb{N})\, Q(m)$, usando o PIM. Essa afirmação então implica $(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \rightarrow P(n)$.

Este raciocínio nos permite provar tais afirmações por indução matemática de maneira mais direta, usando n_0 como base em vez de 0:
Teorema: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, n_0 um número natural qualquer. Se

1. $P(n_0)$ é verdadeira, e
2. Para todo $k \geq n_0$, $(P(k) \rightarrow P(k+1))$,

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

Exemplo

Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.
Prova:

- **Base**: $n = 4$ é verdade pois $16 > 12$.
- **Hipótese de indução**: suponhamos que para algum $k \geq 4$, $k^2 > 3k$.

Exemplo - Cont

- **Passo da indução**: provar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$. Temos que

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Por hipótese de indução $k^2 > 3k$, então

$$k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1$$

. Como $k \geq 4$ temos que $2k + 1 > 3$, logo

$$3k + 2k + 1 \geq 3k + 3 = 3(k+1)$$

portanto, destas duas desigualdades,

$$(k+1)^2 > 3(k+1).$$

Fim.

Passo genérico constante

Numa prova por indução, além de começar com uma base n_0 arbitrária, é possível usar um incremento maior que 1 no passo da indução. Ou seja, o passo da indução pode ser a demonstração de que $P(k) \to P(k+p)$, em vez de $P(k) \to P(k+1)$.

Teorema: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, n_0 um número natural qualquer, e p um inteiro positivo. Se

1. $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+p-1)$ são verdadeiros, e
2. Para todo k tal que $k \geq n_0$, $P(k) \to P(k+p)$.

então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

Exemplo

Prove que qualquer valor postal inteiro $n \geq 8$ pode ser obtido utilizando apenas selos com valores 3 e 5.
Podemos provar esta afirmação usando o teorema da indução geral com incremento $p = 3$:

- **Bases**: $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$. Como $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$ e $10 = 5 + 5$ temos que a proposição é válida para as bases.
- **Hipótese de indução**: Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum valor $k \geq 8$.
- **Passo**: Vamos provar que a proposição é válida para $k + 3$. Podemos obter o valor $k + 3$ acrescentando um selo de valor 3 aos selos usados para obter k.

Troca de variável na hipótese

Na hipótese de indução, podemos fazer uma troca de variável, usando k no lugar de $k+1$. Nesse caso, o roteiro da demonstração fica assim:

- **Base da Indução**: Provar que $P(0)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução**: Supor que para algum inteiro **positivo** k, $P(k-1)$ é verdade.
- **Passo da Indução**: Provar que $P(k)$ é verdade.

Usos indevidos da indução matemática

É importante entender e verificar as condições em que a indução matemática se aplica. Se mal utilizada, ela pode levar a conclusões absurdas. Nos exemplos a seguir, tente encontrar o erro na demonstração.

Todos os cavalos têm a mesma cor.
Seja a sentença aberta $P(n)$: "Num conjunto com n cavalos, todos os cavalos têm a mesma cor."
Prova: Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, por indução.

- **Base**: Para $n = 1$ a sentença $P(n)$ é verdadeira.
- **Hipótese de indução**: Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$; isto é, em todo conjunto com k cavalos, todos têm a mesma cor.

- **Passo de indução**: Vamos provar que, em todo conjunto com $k+1$ cavalos, todos têm a mesma cor. Considere um conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ com $k+1$ cavalos. Podemos escrever o conjunto C como união de dois conjuntos, cada um com k cavalos,da seguinte forma:

$$C = C' \cup C'' = \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \{c_2, \ldots, c_{k+1}\}$$

Pela hipótese de indução, todos os cavalos de C' têm a mesma cor. O mesmo é verdade para C''. Como c_2 pertence a C' e a C'', concluímos que os cavalos de C' têm a mesma cor que os cavalos de C''. **Logo todos os cavalos de C têm a mesma cor.** Absurdo!

Paradoxo dos cavalos

Este exemplo, conhecido como **paradoxo dos cavalos**, foi inventado pelo matemático húngaro George Pólya (1887-1995). O exemplo a seguir ilustra um erro similar na aplicação do PIM, com "conclusão" igualmente absurda:

Todos os números naturais são iguais.
Prova: Seja $P(n)$ a sentença aberta "todos os números naturais menores ou iguais a n são iguais." Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução.

- **Base**: $P(0)$ é obviamente verdadeira.
- **Hipótese de indução**: Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 0$, ou seja, todos os números menores ou iguais a k são iguais.
- **Passo de indução**: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Pela hipótese de indução, $k - 1 = k$. Somando 1 em ambos os lados da iqualdade temos $k = k + 1$. **Portanto** $P(k+1)$ **também é verdadeira.** Absurdo!

Exercícios:

- Seja C um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Prove que C tem $n(n-1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.
- Prove que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.