Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Relações

Relações

Uma **relação binária** (ou simplesmente uma **relação**) $\mathcal{R}$ **de** um conjunto A **para** um conjunto B é um sub-conjunto de $A \times B$. Em outras palavras, é um conjunto de pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.
Em geral usa-se a notação $a\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $a\not\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \notin \mathcal{R}$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ dizemos que a **está relacionado com** b pela relação $\mathcal{R}$.

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Então $\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6)\}$ é uma relação de A para B. Neste exemplo, temos $2\mathcal{R}5$ e $3\mathcal{R}5$, mas $2\not\mathcal{R}4$ e $5\not\mathcal{R}2$.

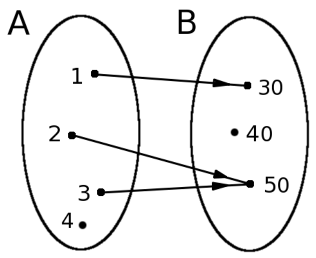


Diagrama da relação $\mathcal{R} = \{(1, 30), (2, 50), (3, 50)\}$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ para o conjunto $B = \{30, 40, 50\}$.

- O conjunto de pares $\left\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{N}\right\}$ é um exemplo de uma relação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$.
- Se R é uma relação de A para A, dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação **em** A ou **sobre** A.
- Observe que os sinais de comparação da álgebra ("$<$", "$\leq$", etc.) são relações binárias definidas sobre os números reais.
- Observe também que "$\in$" é uma relação binária entre o conjunto $\mathcal{U}$ de todos os elementos, e o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ de todos os conjuntos; e que "$\subseteq$" é uma relação binária definida sobre o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$.

Domínio e imagem

O **domínio** de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que estão em $\mathcal{R}$. Isto é:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{\, a : (\exists b)\, (a, b) \in \mathcal{R} \,\}$$

A **imagem** ou **contra-domínio** de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que estão em $\mathcal{R}$. Isto é:

$$\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{\, b : (\exists a)\, (a, b) \in \mathcal{R} \,\}$$

Observe que um conjunto de pares ordenados $\mathcal{R}$ é uma relação de A para B se, e somente se, $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1,4),(2,5),(3,5),(3,6)\}$. Temos que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1,2,3\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{4,5,6\}$.

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação $\left\{(x,x^2) : x \in \mathbb{Z}\right\}$. Observe que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ é o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$, mas $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0,1,4,9,\ldots\}$.

Exemplo: Seja A o conjunto dos presidentes do Brasil, de 1889 a 2010. Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre A tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se o presidente b foi o sucessor de a. Assim, por exemplo, temos que 'Figueiredo' $\mathcal{R}$ 'Tancredo' e 'Fernando Henrique' $\mathcal{R}$ 'Lula', mas 'Lula' $\not\mathcal{R}$ 'Fernando Henrique'. Observe que o domínio desta relação são todos os presidentes menos Lula (que terminou o mandato em 2010), e a imagem são todos os presidentes menos Floriano Peixoto.

Restrição de relações

- Seja $\mathcal{R}$ uma relação, e sejam A' e B' conjuntos quaiquer. A **restrição de $\mathcal{R}$ a A' e B'** é o conjunto de pares de $(a,b) \in \mathcal{R}$ tais que $a \in A'$ e $b \in B'$; ou seja, $\mathcal{R} \cap A' \times B'$.
- A **restrição de $\mathcal{R}$ a A'** é geralmente entendida como $\mathcal{R} \cap A' \times A'$.

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação dos inteiros positivos $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ para os inteiros, tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se x é divisor de y. A restrição de $\mathcal{R}$ aos conjuntos $U = \{0,2,3,5,6\}$ e $V = \{0,1,2,\ldots,9\}$ é o conjunto de pares

$$\{(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,0),(3,3)$$
$$(3,6),(3,9),(5,0),(5,5),(6,0),(6,6)\}$$

A restrição de $\mathcal{R}$ ao conjunto U é

$$\{(2,0),(2,2),(2,6),(3,0),(3,3),$$
$$(3,6),(5,0),(5,5),(6,0),(6,6)\}$$

Relações de identidade

Para qualquer conjunto A, a relação **identidade sobre** A, denotada por $\mathcal{I}_A$, é definida por

$$\mathcal{I}_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

Esta relação nada mais é que a relação de igualdade "$=$", restrita ao conjunto A.

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Relação inversa

- Seja $\mathcal{R}$ uma relação do conjunto A para o conjunto B.
- A **relação inversa** denotada por $\mathcal{R}^{-1}$, é a relação do conjunto B para o conjunto A definida da seguinte forma:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{ (x, y) : (y, x) \in \mathcal{R} \}$$

- Ou seja, $\mathcal{R}^{-1}$ é a relação tal que $a\mathcal{R}^{-1}b$ se e somente se $b\mathcal{R}a$, para quaisquer a e b.
- Observe que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Img}(\mathcal{R})$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$.

Imagem e imagem inversa de conjuntos sob uma relação

Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de um conjunto A para um conjunto B, e X um conjunto qualquer.
A **imagem de X** sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{ b : (\exists a \in X)\, (a, b) \in \mathcal{R} \}$$

A **imagem inversa** de X sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{ a : (\exists b \in X)\, (a, b) \in \mathcal{R} \}$$

Observe que a imagem inversa de X sob $\mathcal{R}$ é a imagem de X sob a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$. A imagem de X sob $\mathcal{R}$ costuma ser indicada por $\mathcal{R}(X)$. A imagem inversa então pode ser indicada por $\mathcal{R}^{-1}(X)$.

Composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações. A **composição de** $\mathcal{R}$ **com** $\mathcal{S}$ é a relação denotada por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, e definida da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) : (\exists b)\, (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}\}$$

Exemplo: Considere as relações

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$$

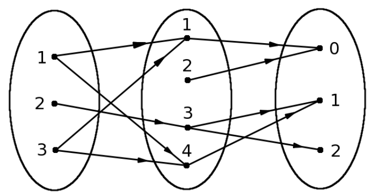
$$\mathcal{S} = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

A composição delas é

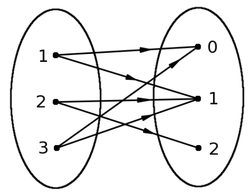
$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

Observe que

- $(1,0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1,1) \in \mathcal{R}$ e $(1,0) \in \mathcal{S}$,
- $(1,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,1) \in \mathcal{S}$,
- $(2,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2,3) \in \mathcal{R}$ e $(3,1) \in \mathcal{S}$,
- $(2,2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2,3) \in \mathcal{R}$ e $(3,2) \in \mathcal{S}$,
- $(3,0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3,1) \in \mathcal{R}$ e $(1,0) \in \mathcal{S}$,
- $(3,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,1) \in \mathcal{S}$.



$\mathcal{R}$ $\mathcal{S}$



$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Exemplo:

- Seja $\mathcal{R}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.
- Seja $\mathcal{S}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.
- A composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = y + 1 \wedge y = 2z$$

- Ou seja, $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow x = 2z + 1$.
- Observe que $(5,2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque $(5,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,2) \in \mathcal{S}$.
- Observe também que $(6,2) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque o único elemento relacionado com 6 por $\mathcal{R}$ é 5, mas $(5,2) \notin \mathcal{S}$.
- e $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$?

- Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ as mesmas relações.
  - Seja $\mathcal{R}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.
  - Seja $\mathcal{S}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.
- A composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = 2y \wedge y = z + 1$$

- Ou seja, $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow x = 2z + 2$.
- Observe que $(5,2) \notin \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, mas $(6,2) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.
- Podemos observar então que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, ou seja, a composição de relações não é comutativa.

- Observe que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, temos

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$$

- e

$$\mathrm{Img}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Img}(\mathcal{S})$$

Exercício: Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os pares (x, x^2) onde x é um número inteiro. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os pares $(3y, y)$ onde y é um número natural. Descreva as relações $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Notação alternativa

- A notação $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ para composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$ é muito comum, especialmente para funções.
- Em algumas áreas da matemática, entretanto, a composição de uma relação $\mathcal{R}$ com uma relação $\mathcal{S}$ é denotada pela justaposição $\mathcal{R}\mathcal{S}$.
- Observe que, nesta notação, a ordem das relações é oposta à da notação tradicional.

Composição com identidade

Observe que, para qualquer relação $\mathcal{R}$ de um conjunto A para um conjunto B, as composiçãos $\mathcal{I}_B \circ \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A$ são sempre a própria relação $\mathcal{R}$.

Composição com a relação inversa

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, uma relação sobre A. Lembramos que a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ é $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, e que $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Então:

- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1)\}$.

Observamos que neste exemplo $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ é diferente de $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, e ambas são diferentes da identidade $\mathcal{I}_A$.

Inversa da composição

Pode-se verificar que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$,

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$$

Ou seja, a **inversa da composição é a composição das inversas, na ordem inversa**.

Exemplo:

- Sejam as relações

$$\mathcal{R} = \{(1, 20), (1, 30), (2, 40), (3, 20)\}$$
$$\mathcal{S} = \{(20, 200), (20, 300), (40, 200)\}$$

- Observe que
  - $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 200), (1, 300), (2, 200), (3, 200), (3, 300)\}$.
  - $\mathcal{R}^{-1} = \{(20, 1), (30, 1), (40, 2), (20, 3)\}$.
  - $\mathcal{S}^{-1} = \{(200, 20), (300, 20), (200, 40)\}$.
  - $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = \{(200, 1), (300, 1), (200, 3), (200, 2), (300, 3)\}$.
  - $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \{(200, 1), (300, 1), (200, 3), (300, 3), (200, 2)\}$.

Composição e inclusão

Para quaisquer relações $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, se $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$, então $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{S}_2$.

Potências de uma relação

Seja $\mathcal{R}$ uma relação. A **potência** $\mathcal{R}^n$, $n = 1, 2, \cdots$ é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1 &= \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

Teorema: Para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, e qualquer inteiro $n \geq 1$, se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ então $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{S}^n$.

Tipos de relações

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto A.

- $\mathcal{R}$ é **reflexiva** sobre A se, e somente se, para todo $a \in A$ o par (a, a) está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é **irreflexiva** se, e somente se, ela não possui nenhum par da forma (a, a).
- $\mathcal{R}$ é **simétrica** se, e somente se, $(\forall a, b \in A)\, a\mathcal{R}b \to b\mathcal{R}a$. Ou seja, se um par (a, b) está em $\mathcal{R}$ então o par (b, a) também está em $\mathcal{R}$.

- $\mathcal{R}$ é **anti-simétrica** se, e somente se, $(\forall a, b \in A)\,(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \to a = b$. Ou seja, para quaisquer elementos distintos a e b em A, no máximo um dos pares (a, b) e (b, a) está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é **transitiva** se, e somente se, $(\forall a, b, c \in A)\,(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \to a\mathcal{R}c$. Ou seja, se dois pares (a, b) e (b, c) estão em $\mathcal{R}$ então o par (a, c) também está em $\mathcal{R}$.

- Note que dizer que $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A equivale a dizer que $\mathcal{I}_A \subseteq \mathcal{R}$;
- dizer que $\mathcal{R}$ é irreflexiva equivale a dizer que $\mathcal{R} \cap \mathcal{I}_A = \emptyset$.
- Observe que há relações que não são nem reflexivas e nem irreflexivas, como por exemplo a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)(3, 1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.
- Porém, se o conjunto A não é vazio, uma relação não pode ser ao mesmo tempo reflexiva sobre A e irreflexiva.

- Observe também que os termos simétrica e anti-simétrica não são opostos: qualquer relação de identidade, por exemplo, é ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica.
- Além disso, há relações que não são nem simétricas nem anti-simétricas. Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)(3, 1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ não é simétrica, pois ela tem o par $(3, 1)$ mas não tem o par $(1, 3)$; e nem anti-simétrica, pois ela tem os dois pares $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

- Finalmente, observe que uma relação pode satisfazer qualquer uma das propriedades por vacuidade, se não existirem elementos em A que satisfaçam as condições no lado esquerdo do conectivo '$\rightarrow$'.
- Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_3 = \{(1,2)\}$ é transitiva, porque não existem a, b e c tais que $(a\mathcal{R}_3 b) \wedge (b\mathcal{R}_3 c)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 =& \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\\
&(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}.\\
\mathcal{R}_2 =& \{(1,1),(1,2),(2,1)\}.\\
\mathcal{R}_3 =& \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\\
&(3,3),(4,1),(1,4),(4,4)\}.\\
\mathcal{R}_4 =& \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.\\
\mathcal{R}_5 =& \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),\\
&(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}.\\
\mathcal{R}_6 =& \{(3,4)\}.
\end{aligned}
$$

- São reflexivas sobre A: $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_5$.
- São irreflexivas sobre A: $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{R}_6$.
- São simétricas: $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$.
- São anti-simétricas: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ e $\mathcal{R}_6$.
- São transitivas: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ e $\mathcal{R}_6$.