## Matemática Discreta

Pedro Hokama



## Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.



# Relações de ordem e equivalência



## Relações de ordem

**Definição:** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ é uma **relação de ordem** se ela é reflexiva sobre $A$, anti-simétrica e transitiva.

**Exemplo:** Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x \leq y \}$.

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$ pois $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \leq x$ logo $(\forall x \in \mathbb{R})\, x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z))$. Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z$$

.

- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica pois $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$. Portanto

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y$$

.

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre um conjunto $A$, o par $(A, \mathcal{R})$ é chamado um **conjunto ordenado**. Por exemplo, $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto ordenado (entendendo-se que '$\leq$' aqui é a restrição da relação "menor ou igual" aos números naturais). Outro exemplo de conjunto ordenado é $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$, para qualquer conjunto $A$.



## Relações de ordem estrita

**Definição:** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ é uma **relação de ordem estrita** se ela é irreflexiva sobre $A$, anti-simétrica e transitiva.

**Exemplo:** Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x < y \}$.

- $\mathcal{R}$ é irreflexiva sobre $A$ pois $(\forall x \in \mathbb{R})\, \neg(x < x)$ logo $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \not\mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z))$. Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, pois $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, \neg((x < y \wedge y < x)$. Portanto, por vacuidade,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y.$$



## Relações de ordem estrita

- Note que uma relação de ordem estrita não é um tipo particular de relação de ordem.
- Porém, toda relação de ordem estrita $\mathcal{R}$ pode ser obtida de uma relação de ordem $\mathcal{S}$ excluindo-se todos os pares da forma $(a, a)$.
- Reciprocamente, toda relação de ordem $\mathcal{S}$ sobre um conjunto $A$ é a união $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$ onde $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem estrita sobre $A$.
- Note que, para quaisquer $a, b \in A$

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow (a\mathcal{S}b \wedge a \neq b)$$

$$a\mathcal{S}b \leftrightarrow (a\mathcal{R}b \vee a = b)$$

- Dizemos que $\mathcal{R}$ é a **ordem estrita associada à ordem** $\mathcal{S}$, e vice-versa.



## Ordem total

**Definição:** Uma relação $\mathcal{R}$ é uma **ordem total** sobre um conjunto $A$ (ou **ordem linear**) se, e somente se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre $A$ e quaisquer dois elementos de $A$ são comparáveis por $\mathcal{R}$.

Portanto uma relação de ordem $\mathcal{R}$ é total se, quaisquer que sejam $a$ e $b$ em $A$, $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total sobre $A$, o par $(A, \mathcal{R})$ é chamado de **conjunto totalmente ordenado**.

**Exemplo:** A relação $\leq$ é uma ordem total sobre $\mathbb{R}$, pois $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ a \leq b \vee b \leq a$.

A relação $\subseteq$ não é uma ordem total quando $A$ tem pelo menos dois elementos, pois nesse caso existem subconjuntos distintos $X$ e $Y$ em $\mathbb{P}(A)$



## Ordem lexicográfica

- Uma ordem muito importante no dia a dia, e em computação, é a **ordem alfabética** definida sobre palavras, nomes, etc.. Por exemplo, nesta ordem "`hoje`" vem antes de "`ontem`", "`biscoito`" vem antes de "`bolacha`", "`porco`" vem antes de `porta`", e "`sol`" vem antes de "`soldado`".
- Observe que esta ordem é baseada na ordem tradicional das letras do alfabeto: `a`, `b`, `c`, `...`, `z`.
- Compara-se a primeira letra de uma com a primeira letra da outra. Se forem diferentes, a ordem das palavras é a mesma das letras.
- Se as palavras começam com a mesma letra, compara-se a segunda letra de uma com a segunda da outra.
- Se persistir o empate, consideram-se as terceiras letras, as quartas letras, e assim por diante — até haver um desempate (letras diferentes na mesma posição das duas palavras), ou uma das palavras terminar. Neste último caso (como no exemplo de "`sol`" e "`soldado`"), convenciona-se que a palavra que termina primeiro vem antes da outra.



## Ordem lexicográfica

- Relação $\leq_2$ definida sobre os pares $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pela fórmula

$$(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2) \leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$



## Diagrama de Hasse

Podemos representar graficamente um conjunto ordenado $(A, \mathcal{R})$, onde $A$ é finito e não muito grande, por um diagrama de pontos e linhas, chamado **diagrama de Hasse** (em homenagem ao matemático alemão Helmut Hasse, 1898–1979).

## Diagrama de Hasse

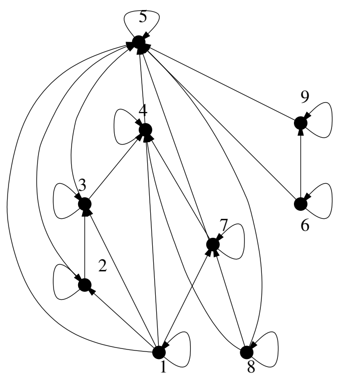
- cada elemento de $A$ é representado por um ponto do plano, com posição arbitrária,
- exceto pela regra de que, para todo par $(a, b) \in \mathcal{R}$ com $a, b \in A$ e $a \neq b$, o ponto que representa $a$ deve estar abaixo do ponto que representa $b$
- Cada um desses pares é representado por uma linha reta ligando $a$ com $b$, exceto que pares que podem ser deduzidos por transitividade não são desenhados.

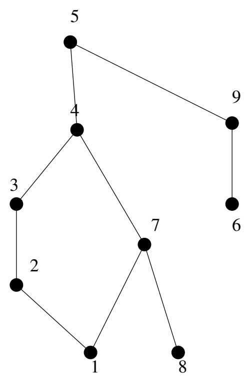


Para ilustrar a construção deste diagrama, vamos usar o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e a seguinte relação sobre $A$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} \quad = \{ \quad & (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,7), \\
& (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5), \\
& (3,3),\ (3,4),\ (3,5), \\
& (4,4),\ (4,5), \\
& (5,5), \\
& (6,6),\ (6,9),\ (6,5), \\
& (7,7),\ (7,4),\ (7,5), \\
& (8,8),\ (8,7),\ (8,4),\ (8,5), \\
& (9,9),\ (9,5)
\end{aligned}
$$






$(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$,
$(1,5)$, $(1,7)$,
$(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$,
$(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$,
$(4,4)$, $(4,5)$,
$(5,5)$,
$(6,6)$, $(6,9)$, $(6,5)$,
$(7,7)$, $(7,4)$, $(7,5)$,
$(8,8)$, $(8,7)$, $(8,4)$, $(8,5)$,
$(9,9)$, $(9,5)$



## Elementos mínimos e máximos

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto $X$, e $A$ um subconjunto de $X$. Um **elemento mínimo de** $A$ **sob** $\mathcal{R}$ é um elemento $m \in A$ se $(m, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.

**Exemplo:** Considere o conjunto de conjuntos

$$A = \{\, \{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\} \,\}$$

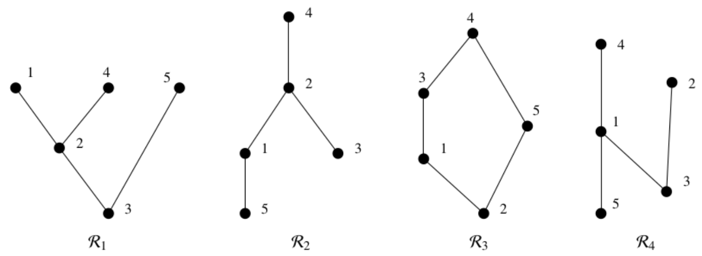
e seja $\mathcal{R}$ a relação "$\subseteq$" entre conjuntos. O elemento $\{2, 4\}$ de $A$ é mínimo sob $\mathcal{R}$, pois $\{2, 4\} \subseteq b$ para todo conjunto $b \in A$.

Um elemento $m$ de $A$ é **máximo** sob uma relação $\mathcal{R}$ se $(a, m) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.



No diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$, o elemento mínimo existe se há um único ponto no diagrama a partir do qual é possível alcançar qualquer outro ponto por uma sequência de linhas, todas elas percorridas no sentido de baixo para cima. O elemento máximo, se existe, pode ser identificado de maneira análoga, isto é, se a partir dele podemos alcançar qualquer outro ponto percorrendo uma sequência de linhas no sentido descendente.






Diagramas de Hasse de quatro relações de ordem sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Na relação $\mathcal{R}_1$, o elemento 3 é mínimo e não existe elemento máximo. Na relação $\mathcal{R}_2$, o elemento 4 é máximo, e não há elemento mínimo. Na relação $\mathcal{R}_3$, o elemento 2 é mínimo e 4 é maximo. Na relação $\mathcal{R}_4$ não existe nem mínimo nem máximo.



## Elementos minimais e maximais

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto $X$, e $A$ um subconjunto de $X$. Um **elemento minimal de** $A$ **sob** $\mathcal{R}$ é um elemento $m \in A$ tal que não existe nenhum $a \in A$, diferente de $m$, com $(a, m) \in \mathcal{R}$.

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

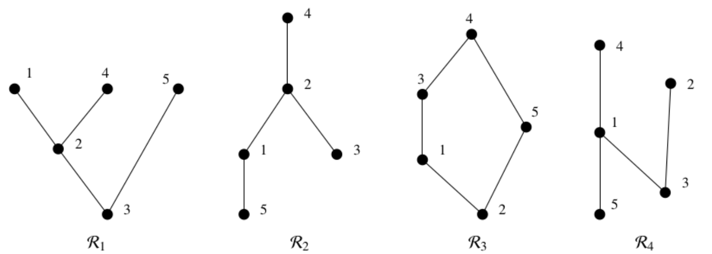
$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (1,4), (4,4), (2,4), (3,4), (5,5), (5,6), (6,6)\}.$$

O inteiro 2, por exemplo, é um elemento minimal de $A$ sob $\mathcal{R}$, pois não existe nenhum par $(a, 2)$ na relação. Os elementos minimais de $A$ sob $\mathcal{R}$ são 1, 2, e 5.



Um **elemento maximal de $A$ sob** $\mathcal{R}$ é um elemento $m$ de $A$ tal que não existe nenhum $a$ em $A$, diferente de $m$, tal que $(m, a) \in \mathcal{R}$.






Diagramas de Hasse de quatro relações de ordem sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Na relação $\mathcal{R}_1$, o único elemento minimal é 3, e os elementos maximais são 1, 4 e 5. Na relação $\mathcal{R}_2$, os elementos minimais são 3 e 5, e o único maximal é 4. Na relação $\mathcal{R}_3$, o único minimal é 2 e o único maximal é 4. Na relação $\mathcal{R}_4$ os minimais são 3 e 5, e os maximais são 2 e 4.



Os conceitos de minimal e maximal são muito usados quando $A$ é um conjunto de conjuntos, e $\mathcal{R}$ é a relação '$\subseteq$'. Neste caso, um elemento minimal de $A$ é um conjunto que não contém propriamente nenhum outro elemento de $A$. Por exemplo, seja

$$A = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$$

Neste conjunto, o elemento $\{1, 2, 4\}$ não é minimal, pois ele contém propriamente o conjunto $\{1, 2\}$ que também está em $A$. Por outro lado, $\{2\}$, $\{1, 3\}$, e $\{3, 4, 5\}$ são minimais sob a relação '$\subseteq$'. Analogamente o elemento $\{2\}$ não é maximal pois $\{2\} \subseteq \{1, 2, 4\}$. Os elementos maximais de $A$ sob $\subseteq$ são $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ e $\{3, 4, 5\}$.

## Relações de equivalência

**Definição:** Uma **relação de equivalência sobre** um conjunto $A$ é uma relação $\mathcal{R}$ sobre $A$ que é reflexiva sobre $A$, simétrica e transitiva.



**Exemplo:** Seja $A$ o conjunto de todas as retas do plano, e seja $\mathcal{R}$ a relação $X\mathcal{R}Y$ se, e somente se, $X = Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$. Esta relação é simplesmente a relação de paralelismo da geometria plana. Claramente a relação é reflexiva sobre $A$, simétrica e transitiva, logo é uma relação de equivalência.



## Classes de equivalência

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Para todo elemento $a \in A$, o conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$$

é denominado a **classe de equivalência** do elemento $a$ na relação $\mathcal{R}$.



**Exemplo:** Vamos construir as classes de equivalência da relação $\mathcal{R}$ de congruência módulo 5. A classe de equivalência de um inteiro $i$ na relação $\mathcal{R}$, é o conjunto

$$[i]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z} : (\exists s \in \mathbb{Z})\ x - i = 5s\}$$

Ou seja, $x \in [i]_{\mathcal{R}}$ se e somente se $x = 5k + i$ para algum $r \in \mathbb{Z}$; isto é, se e somente se $x$ tem o mesmo resto que $i$ quando dividido por 5. Portanto existem apenas 5 classes de equivalência, que correspondem aos possíveis restos da divisão por 5:

- $[0]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$.
- $[1]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11 \cdots\}$.
- $[2]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12 \cdots\}$.
- $[3]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$.
- $[4]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$.



## Relações de equivalência e partições

Classes de uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ são duas a duas disjuntas. Como todo elemento de $A$ está em alguma classe, a união de todas as classes é o conjunto $A$. Isto significa que as classes de equivalência de $\mathcal{R}$ formam uma partição do conjunto $A$.