Matemática Discreta

Pedro Hokama

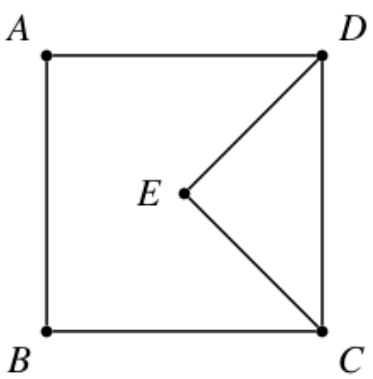
Fontes

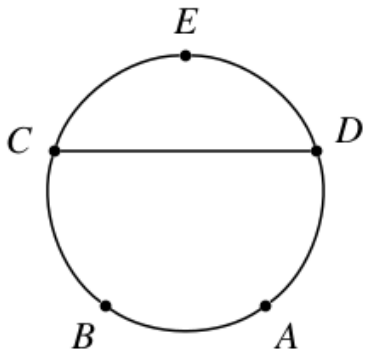
- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Introdução à Teoria de Grafos

Introdução à Teoria de Grafos

- Informalmente, um grafo é um modelo matemático para representar uma coleção de objetos (chamados **vértices**) que são ligados aos pares por outra coleção de objetos (chamados **arcos** ou **arestas**).
- Em ilustrações de grafos, os vértices são geralmente representados por pontos, círculos ou caixas, e as arestas por linhas ligando os vértices. Em tais diagramas entende-se que as posições dos vértices e a forma das linhas são irrelevantes; o grafo representa apenas a **topologia** dos vértices e arestas, isto é, quem está ligado a quem.

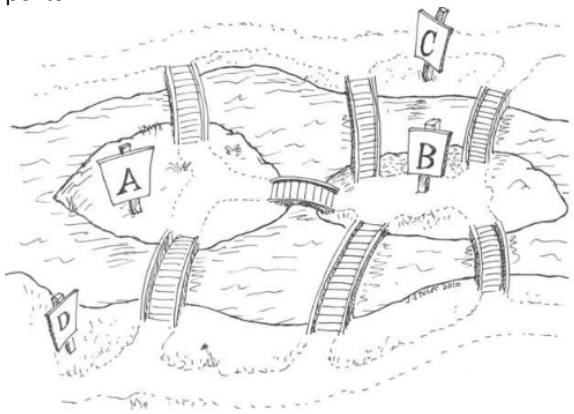




- Grafos são extremamente úteis para modelar problemas em muitas áreas de aplicação.
- Por exemplo, a malha rodoviária de um estado pode ser representada por um grafo em que as cidades são os vértices, e cada trecho de estrada entre cidades consecutivas é uma aresta.
- Um circuito elétrico pode ser visto como um grafo onde os vértices são condutores metálicos e as arestas são resistores, capacitores, e outros componentes.
- Uma molécula pode ser abstraída por um grafo onde os átomos são os vértices e as arestas são as ligações covalentes.
- Uma treliça metálica pode ser entendida como um grafo onde as arestas são as barras e os vértices são as juntas.

- Grafos são especialmente importantes em computação, para modelar conceitos tanto de hardware (desde circuitos digitais até a internet mundial) quanto de software (como registros em bancos de dados, blocos e módulos de programas, protocolos de transmissão de dados e muito mais).
- Os vértices podem representar usuários de uma rede social e as arestas suas conexões.
- Páginas web e links entre elas.
- Máquinas (reais ou virtuais) e dependência de serviços.
- etc, etc.

- O conceito abstrato de grafo e o estudo matemático de suas propriedades foi uma das muitas contribuições do matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783).
- Um quebra-cabeças famoso na época era encontrar um passeio que visitasse todas as pontes da cidade de Königsberg passando uma única vez em cada ponte.



- Euler resumiu as propriedades essenciais do mapa por um diagrama de pontos ligados por linhas.
- Apenas analisando esse diagrama abstrato, ele provou que o tal passeio era impossível.
- Este trabalho (publicado em 1736) é considerado o primeiro artigo da teoria de grafos.

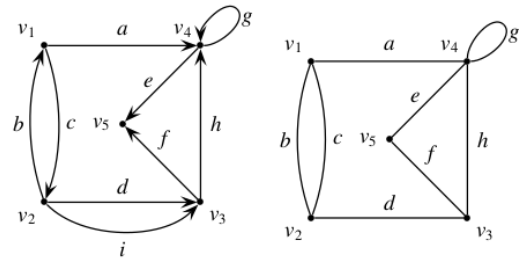
- A teoria matemática dos grafos foi desenvolvida gradualmente no século 19, quando surgiram importantes aplicações em química e engenharia.
- Sua importância cresceu muito no século 20, com o surgimento das redes de telefonia, dos circuitos digitais e, por fim, dos computadores.

Definição formal

- Há muitas maneiras de definir o conceito de grafo. Qual delas é melhor depende da aplicação. De modo geral, adotaremos as seguintes definições de grafo.
- Um **grafo** G é uma tripla da forma (V, E, F) onde V e E são conjuntos quaisquer, chamados de **vértices** e **arestas**; e F é uma função, chamada **função de incidência**, que a cada elemento e de E associa um par $F(e)$ de vértices, que são chamados de **extremos** de e.
- Definição alternativa (mais adequada para grafo simples): Um **grafo** G é uma dupla da forma (V, E) onde V e E são conjuntos chamados de **vértices** e **arestas**; cada elemento de E é um subconjunto de dois vértices $\{u, v\}$ em que $u \in V$ e $v \in V$.

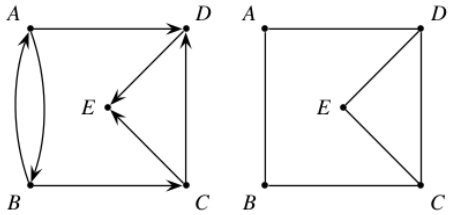
Orientação

- Há também a possibilidade das arestas serem pares ordenados (u, v) de vértices. Nesse caso as arestas tem uma direção, ou sentido. Muitas vezes nesses casos chamamos de "arcos".
- Se esse for o caso, o grafo é dito **orientado** ou **dirigido**.



Grafo Simples vs. Arestas paralelas e laços

- Pelas definições acima, pode haver um número arbitrário de arestas com os mesmos extremos.
- Ou seja podemos ter $e', e'' \in E$ com $e' \neq e''$ mas $F(e') = F(e'')$. Este modelo também permite laços, ou seja arestas e tais que $F(e) = (u, u)$ (no caso orientado) ou $F(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algum $u \in V$.
- Usaremos o termo **grafo simples** para significar um grafo sem laços e sem arestas paralelas. (Para alguns autores, aliás, **grafo** significa "grafo simples" exclusivamente, e usam o termo **multigrafo** quando há arestas paralelas.)



Grafos finitos e infinitos

- Um grafo pode ter infinitos vértices e/ou infinitas arestas.
- Tais grafos infinitos tem aplicações na matemática, mas os que ocorrem em computação geralmente são finitos em ambos os aspectos.
- Aqui vamos considerar principalmente grafos finitos.

Conceitos fundamentais

- **Incidência:** Se um vértice v de um grafo G é um dos extremos de alguma aresta e de G, dizemos que e **incide** em v, e vice-versa. (Podemos definir uma relação de incidência)
- **Adjacência:** Dois vértices u, v são ditos **adjacentes** ou **vizinhos** em um grafo G se e somente se existe uma aresta de G cujos extremos são u e v. Esta relação (simétrica) entre vértices é a **relação de adjacência** (**não orientada**) do grafo.
- **Dominância:** Em um grafo orientado, pode-se dizer que um vértice u **domina** ou **atinge** outro vértice v se e somente se existe uma aresta de G com origem u e destino v.

Conceitos fundamentais

- **Grau do vértice:** Em um grafo G, definimos o **grau** de um vértice v como o número de arestas de G incidentes a v. Nesta definição, cada laço deve ser contado duas vezes. Denotaremos o grau por $d(v)$.
- Se o grafo G é orientado, podemos também definir o **grau de entrada** e o **grau de saída** de um vértice v como o número de arestas que entram em v ou saem de v, respectivamente. Denotaremos esses números por $d^+(v)$ e $d^-(v)$, respectivamente. Note que cada laço é contado uma vez em ambos os graus. Nesse caso, temos que $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

Teorema: Em qualquer grafo $G = (V, E, F)$, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Isto é

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$$

Prova: Cada aresta (laço ou não) contribui duas unidades na soma dos graus.

Corolário: Em todo grafo $G = (V, E, F)$, o número de vértices de grau ímpar é par.
Prova: Sejam P o conjunto dos vértices de grau par e I o conjunto dos vértices de grau ímpar. Então

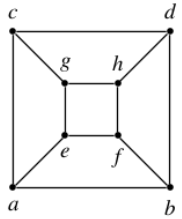
$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in P} d(v) + \sum_{v \in I} d(v) = 2\,|E|$$

logo

$$\sum_{v \in I} d(v) = 2\,|E| - \sum_{v \in P} d(v)$$

O lado direito da equação acima é par. Como a soma de parcelas ímpares é par somente se o número de parcelas for par, concluímos que o $|I|$ é par.

- **Grafos regulares:** Um grafo G é **regular** se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Em particular se o grau dos vértices é r então G é chamado **r-regular**— regular de grau r. Se o grafo G é orientado os graus de entrada e saída devem ser iguais.



- **Grafos completos:** Um grafo G é chamado **completo** se não tem laços e existe exatamente uma aresta entre cada par de vértices. Note que um grafo completo é sempre um grafo simples e $(n-1)$ -regular.

Exercício: Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

Exercício: Quantas arestas possui um grafo k-regular com n vértices?

Percursos em grafos

Passeios, trilhas e caminhos

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, onde cada v_i é um vértice de G, cada e_i é uma aresta de G, e os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i. O inteiro k é o **comprimento do passeio**, denotado por $|P|$. Quando o grafo é simples podemos definir o passeio apenas pela sequência de seus vértices.
- Em particular, um passeio pode ter apenas um vértice e nenhuma aresta, $P = (v_0)$. Tal passeio é dito **trivial**, e seu comprimento é zero.
- Se as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_k$ são todas distintas o passeio é chamado de **trilha**. Note que uma trilha pode repetir vértices.
- Um **caminho** em um grafo é um passeio que não repete vértices. É fácil ver que um caminho não pode visitar mais de uma vez a mesma aresta, portanto todo caminho também é uma trilha.
  Note que um caminho de comprimento k visita exatamente $k + 1$ vértices distintos e tem exatamente $k - 1$ vértices internos.

Circuitos e ciclos

- Dizemos que um passeio $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ é **fechado** se $v_0 = v_k$, isto é, se ele começa e termina no mesmo vértice.
- Um **circuito** ou **ciclo** em um grafo G é um passeio fechado $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ que não repete vértices nem arestas exceto $v_0 = v_k$.
- Em grafos orientados, passeios, trilhas, caminho e circuitos orientados seguem a mesma definição, mas os arcos devem respeitar a orientação.

Subgrafos

- Um grafo H é um **subgrafo** de outro grafo G se $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$, e cada aresta de E_H tem os mesmos extremos em H e em G.
- Se G é orientado, H também precisa ser orientado e as arestas precisam ter também a mesma orientação. Ou seja, F_H é a restrição F_G a E_H.
- Dado o grafo G, cada subgrafo H é completamente determinado pelos conjuntos V_H e E_H. Se $V_H = V_G$ o subgrafo H é chamado **subgrafo gerador** ou **subgrafo espalhado**.

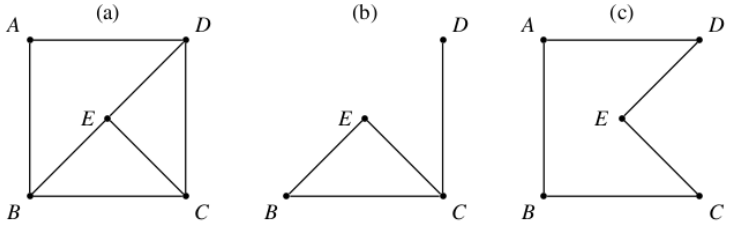


Figura 13.6: (a) Um grafo. (b) Um dos seus subgrafos. (c) Um subgrafo gerador.

Subgrafos Induzido

- Se X é um subconjunto de V_G, define-se o **subgrafo de** G **induzido por** X, denotado por $G[X]$, como sendo o maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X. Isto é, o subgrafo com esses vértices cujas arestas são todas as arestas de G que possuem ambos os extremos em X.

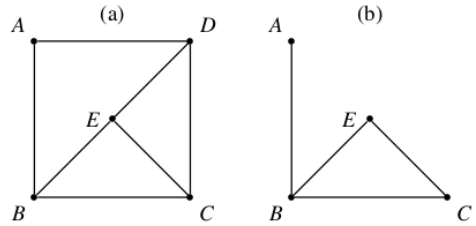


Figura 13.7: (a)Um grafo G. (b) O subgrafo induzido $G[X]$ onde $X = \{A, B, C, E\} \subseteq \mathcal{V}G$.

- Um subgrafo induzido por um conjunto de arestas, contêm somente aquelas arestas, e somente os vértices que são extremos dessas arestas.

Grafos complementares

- Dois grafos simples não orientados G e H são ditos **complementares** se eles tem o mesmo conjunto de vértices V, e para qualquer par de vértices distintos $u, v \in V$, a aresta $\{u, v\}$ está em G se e somente se ela não está em H.
- No caso de grafos simples orientados, vale a mesma definição, com o par ordenado (u, v) em vez de $\{u, v\}$.
- Dito de outra forma, dois grafos simples G e H são complementares se e somente se $V_G = V_H$, $E_H \cap E_G = \emptyset$, e $E_H \cup E_G$ são todos os pares de vértices distintos. O grafo complementar de um grafo simples G é chamado de **complemento** de G e denotado por $\overline{G}$. Observe que $G \cup \overline{G}$ é o grafo simples completo com vértices V_G.

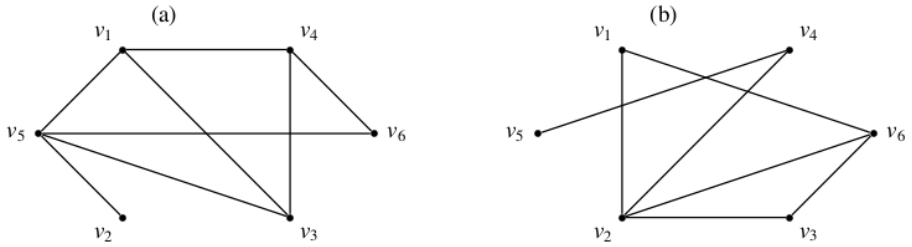


Figura 13.10: (a) Um grafo G. (b) O seu complemento $\bar{G}$

Representação matricial de grafos

- A **matriz de adjacência** de um grafo finito G é simplesmente a representação matricial da sua relação de adjacência. Ou seja, escolhida uma ordenação total $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dos vértices de G, construímos a matriz booleana M de n linhas e n colunas onde M_{ij} é V se e somente se E inclui uma aresta com extremos (v_i, v_j) no caso orientado, ou $\{v_i, v_j\}$ no caso não orientado. Observe que, neste segundo caso, a matriz será simétrica ($M_{ij} = M_{ji}$ para quaisquer i e j).
- Se a definição permite arestas múltiplas, a matriz booleana de adjacências não é mais suficiente para representar completamente o grafo. Para tal fim, podemos entretanto usar uma matriz M onde cada elemento M_{ij} é um número natural, especificamente o número de arestas com extremos (v_i, v_j) ou $\{v_i, v_j\}$, conforme o caso. Porém, esta representação ainda não permite saber **quais** arestas ligam esses dois vértices.

Matriz de incidência

- A **matriz de incidência** de um grafo finito não orientado G é simplesmente a representação matricial da sua relação de incidência. Ou seja, escolhida uma ordenação total $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dos vértices de G e uma ordenação total $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$ das arestas, construímos a matriz booleana M de n linhas e m colunas onde M_{ik} é V se, e somente se o vértice v_i é um extremo da aresta e_k.
- Dadas as listas de vértices e arestas, a matriz de incidência determina completamente o grafo, mesmo quando este possui laços ou arestas paralelas.
- Em algumas aplicações, é conveniente combinar estas duas matrizes em uma única matriz M cujos elementos são inteiros no conjunto $\{+1, 0, -1\}$; sendo que M_{ik} é $+1$ se e_k entra em v_i, -1 se e_k sai de v_i, e 0 se e_k não incide em v_i. Ou seja, $M_{ik} = M^+_{ik} - M^-_{ik}$, supondo que $V = 1$ e $F = 0$. Entretanto, esta representação somente pode ser usada se o grafo não tiver laços.