

Matemática Discreta

Pedro Hokama

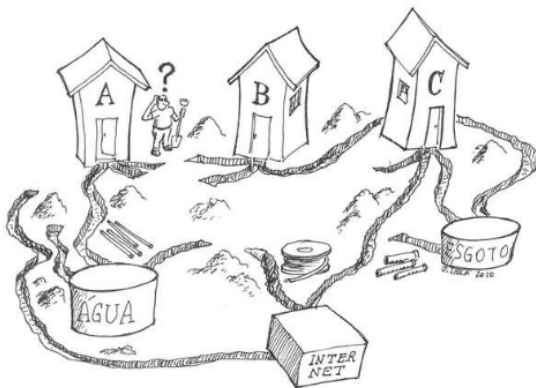
- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/21

2/21

Grafos planares

- Um quebra-cabeças clássico pede para ligar três casas a três centrais de serviço — água, esgoto e internet banda-larga — sem que nenhuma dessas ligações cruze qualquer outra.



- O problema pede para desenhar um grafo G (neste caso, o grafo completo bipartido $K_{3,3}$) no plano, de modo que nenhuma aresta cruze outra aresta ou passe por um vértice que não é seu extremo.
- Um desenho deste tipo é chamado de **representação planar** do grafo G .
- Se G pode ser desenhado desta forma, dizemos que ele é um grafo **planar**.
- Nem todo grafo é planar.

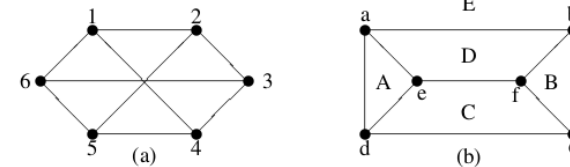


Figura 13.21: (a) Um grafo não planar. (b) Um grafo planar.

3/21

4/21

- Uma representação planar de um grafo divide o plano em uma ou mais regiões, separadas pelos desenhos dos vértices e arestas.
- Essas regiões são chamadas de **faces** da representação. Na figura (b) há cinco faces (A, B, C, D, E). Note que uma dessas regiões — a **face externa** E — tem tamanho infinito, as demais tem tamanho finito.

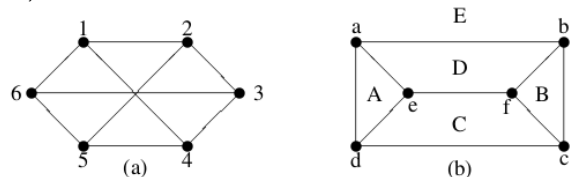


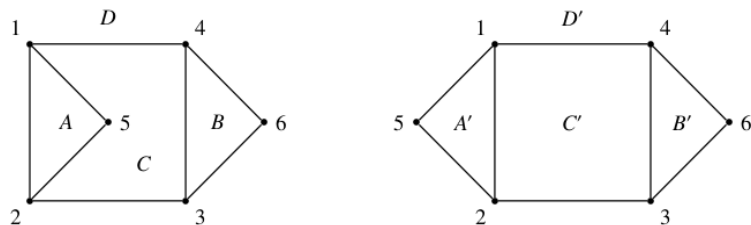
Figura 13.21: (a) Um grafo não planar. (b) Um grafo planar.

5/21

6/21

A fórmula de Euler para grafos planares

- Um mesmo grafo planar G pode ter várias representações planares bem diferentes.
- Na figura por exemplo, no primeiro desenho as faces A, B, C, D tem 3, 3, 5 e 5 lados, respectivamente, enquanto que no segundo as faces A', B', C', D' tem 3, 4 e 6 lados, respectivamente.



7/21

- **Teorema:** Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo G . Uma aresta e de G pertence a um circuito se, e somente se, ela separa duas faces distintas de $\hat{G}$.
- **Corolário:** Um grafo é uma árvore se e somente se ele tem uma representação planar com uma única face.

- No entanto, Euler descobriu que toda representação planar de um mesmo grafo G tem o mesmo número de faces.
- **Teorema:** [Fórmula de Euler] Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo simples e conexo G . Seja f o número de faces de $\hat{G}$. Então $f = e - v + 2$, onde $v = |V|$ e $e = |E|$.

Prova:

- **Base:** Vamos provar usando indução no número de faces de $\hat{G}$. Se $f = 1$ então, pelo corolário visto anteriormente, G é uma árvore. Nesse caso, pelo temos $e = v - 1$. Portanto o enunciado vale para $f = 1$.
- **Hipótese de Indução:** Suponhamos agora que f é um inteiro maior ou igual a 2 e que a afirmação é verdadeira para todas as representações planares de grafos simples com o número de faces menor que f .

8/21

- **Passo de Indução:** Seja $\hat{G}$ uma representação de um grafo conexo e planar G com f faces. Escolha uma aresta a de G que não seja uma aresta de corte. Logo a pertence a algum circuito de G e portanto ela separa duas faces distintas de $\hat{G}$. Então retirando a aresta a de $\hat{G}$ obtemos uma representação $\hat{G}'$ do subgrafo $G - a$. Observe que $G - a$ é conexo e que $\hat{G}'$ tem $f' = f - 1$ faces, pois as duas faces de $\hat{G}$ separadas por a tornam-se uma face em $\hat{G}'$. Sejam $v' = v$ e $e' = e - 1$ o número de vértices e arestas do grafo $G - a$. Por hipótese de indução temos que

$$f' = e' - v' + 2$$

ou seja

$$(f - 1) = (e - 1) - v + 2$$

e portanto

$$f = e - v + 2$$

Corolário: Seja G um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices. Se G não possui ciclos de comprimento 3, então $|E| \leq 2|V| - 4$.

Este corolário permite concluir que $K_{3,3}$ não é planar, pois ele não tem ciclos de comprimento 3, tem $|V_{K_{3,3}}| = 6$, $|E_{K_{3,3}}| = 9$, e $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Observe que este resultado mostra que o problema das três casas e três serviços não tem solução.

- Uma consequência da fórmula de Euler é que um grafo planar não pode ter muitas arestas. Mais precisamente:

Corolário: Seja G um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices. Então $|E| \leq 3|V| - 6$.

Prova:

Seja S a soma dos lados. $3f \leq S \leq 2e$. Logo $f \leq 2/3e$

$$f = e - v + 2$$

$$2/3e \geq e - v + 2$$

$$v - 2 \geq 1/3e$$

$$3v - 6 \geq e$$

Fim.

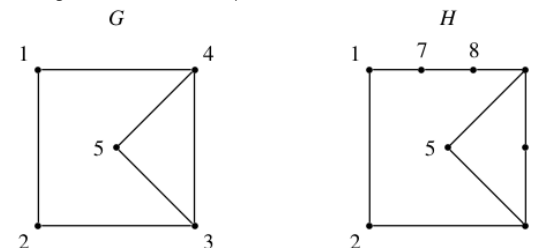
- Esse corolário permite concluir que o grafo completo K_5 não é planar, pois para ele temos $|V_{K_5}| = 5$, $|E_{K_5}| = 10$, e $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$.

9/21

10/21

O teorema de Kuratowski

- Em 1930, o matemático polonês Kasimierz Kuratowski (1896–1980) descobriu que é possível caracterizar os grafos planares apenas em termos discretos.
- Para apresentar esse resultado precisamos do conceito de **subdivisão de um grafo**.
- Dizemos que um grafo simples H é uma **subdivisão** de outro grafo simples G se $V_G \subseteq V_H$, e para cada aresta $e \in E_G$ existe um caminho C_e em H ligando os extremos e ; sendo que toda aresta de E_H e todo vértice de $V_H \setminus V_G$ ocorre em exatamente um destes caminhos. (Ou seja, se e somente se H pode ser obtido de G inserindo-se zero ou mais vértices novos ao longo de cada aresta.)



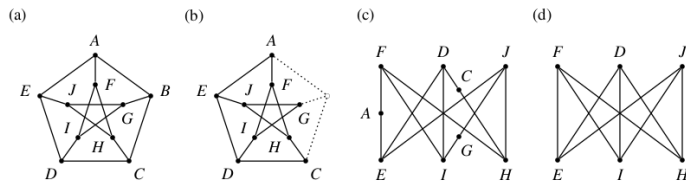
11/21

12/21

Grafo dual

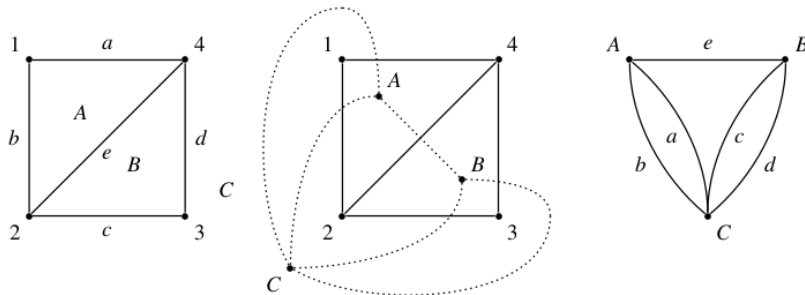
- **Teorema:** [Teorema de Kuratowski] Um grafo G é planar se e somente se ele não contém um subgrafo que seja isomorfo a uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.

Exemplo: A figura (a) mostra o chamado **grafo de Petersen** (estudado pelo matemático dinamarquês Julius Petersen, 1839–1910) que denotaremos por P . Seja H o subgrafo de P formado pelos vértices e arestas cheias, que está redesenhado na figura (b). Neste desenho é fácil ver que H é isomorfo a uma subdivisão do grafo completo $K_{3,3}$ ilustrado na figura (c). Note, por exemplo, que o caminho (e, a, f) de H corresponde à aresta $(1, 4)$ de $K_{3,3}$.



13/21

- Verifica-se que H também é um grafo planar, e tem uma representação planar $\hat{H}$ tal que cada vértice de $\hat{H}$ está dentro da face correspondente de $\hat{G}$, e vice-versa; e que uma aresta e' em $\hat{H}$ cruza uma aresta e'' de $\hat{G}$ se, e somente se, $e' = e''$. Neste caso, diz-se que $\hat{G}$ e $\hat{H}$ são **representações planares duais**, e que G e H são **grafos duais**.



15/21

- Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo G , e seja H um grafo definido da seguinte maneira:

- ▶ Os vértices de H são as faces de $\hat{G}$;
- ▶ As arestas de H são as arestas de G ;
- ▶ Uma aresta e tem extremos nos vértices A e B em H se e somente se ela é parte da fronteira entre as faces A e B em $\hat{G}$.

14/21

- Para cada afirmação sobre uma representação planar $\hat{G}$ há uma afirmação equivalente sobre a representação dual $\hat{H}$, onde os conceitos de face e vértice trocam de papéis.
- Por exemplo, dizer que $\hat{G}$ possui um vértice de grau 5 equivale a dizer que $\hat{H}$ possui uma face com cinco lados (levando em conta que uma mesma aresta pode contribuir com dois lados).
- Aplicando esta correspondência a teoremas já provados podemos obter outros teoremas, às vezes nada óbvios, que não precisam ser demonstrados.

16/21

Coloração de grafos

Coloração de mapas

- É costume em mapas pintar os países (estados, municípios, etc) com cores variadas, de tal forma que estados que tem fronteira comum tenham cores diferentes — a fim de tornar as fronteiras mais visíveis. Uma questão antiga é quantas cores diferentes são necessárias para esse fim.
- A experiência sugere que três cores são insuficientes, mas quatro cores bastam (desde que cada país seja um único território contínuo).
- Será que existe algum mapa que precisa de cinco (ou mais) cores?

17 / 21

- Em 1996 Robertson, Sanders, Seymour e Thomas conseguiram simplificar a demonstração reduzindo a lista para “apenas” 633 casos. (Hoje demonstrações usando computador tornaram-se ferramentas importantes em matemática.)
- Um mapa de países pode ser visto como uma representação planar $\hat{G}$ de um grafo G : cada vértice de G é um ponto do mapa onde três ou mais países tem fronteira comum, e cada aresta é um trecho de fronteira entre dois países ligando dois desse pontos.
- Na representação dual $\hat{H}$ de $\hat{G}$, cada vértice é um país e existe uma aresta ligando dois países se, e somente se, eles tem um trecho de fronteira em comum.
- Portanto, o resultado de Appel e Haken pode ser reformulado como segue

Teorema: [Teorema das quatro cores] Se H é um grafo planar é sempre possível colorir seus vértices com quatro cores, de modo que quaisquer dois vértices adjacentes tenham cores distintas.

19 / 21

- Em 1852 esta questão foi colocada como um problema matemático pelo aluno inglês Francis Guthrie (1831–1899), e foi amplamente divulgada pelo seu professor Augustus De Morgan.
- Em 1879, o matemático inglês Alfred Kempe (1849–1922) publicou uma demonstração de que quatro cores eram suficientes.
- Porém, em 1890 foi observado que havia uma falha na demonstração de Kempe.
- Uma demonstração correta foi obtida apenas em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken.
- Essa demonstração causou bastante controvérsia, pois os autores reduziram o problema a 2000 casos separados, e utilizaram um programa de computador para enumerar e verificar todos esses casos.
- Por esse motivo muitos matemáticos se recusaram a considerar a demonstração válida, e ela foi publicada somente em 1989.

18 / 21

Coloração de grafos em geral

- O problema das quatro cores é um caso particular de uma questão mais geral sobre grafos arbitrários (não necessariamente planares).
- Definimos uma **k-coloração** de um grafo simples G como uma atribuição de k cores aos vértices de tal forma que vértices adjacentes não tem a mesma cor.
- O **número cromático** de G é o menor número k de cores tal que G tem uma k -coloração. Denotaremos por $\chi(G)$ o número cromático de um grafo G .

20 / 21

- É fácil ver que o número cromático de G é 2 se e somente se G é bipartido, e que o número cromático do grafo completo K_n é n .
- O teorema das quatro cores diz que o número cromático de um grafo planar é no máximo 4.
- Ainda não se conhece um algoritmo eficiente para determinar o número cromático de um grafo simples G arbitrário. Entretanto, existe um teorema que limita esse número:

Teorema: Seja G um grafo simples e Δ o maior dos graus de seus vértices. O número cromático de G é no máximo $\Delta + 1$.