Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Princípio da independência

- **Um dado** e **uma moeda** são atirados ao mesmo tempo. Como discutimos acima, é razoável atribuir probabilidade 1/6 à afirmação “o resultado do dado será 3” e probabilidade 1/2 à afirmação “o resultado da moeda será cara”.
- Que probabilidade devemos atribuir à **conjunção** dessas duas frases, ou seja “**o resultado do dado será 3 e o da moeda será cara**”?
- Uma maneira de fazer esta escolha é observar que há 12 possíveis resultados para os dois lances. Vamos denotar por $D(x)$ e $M(y)$, respectivamente, os predicados ”o resultado do dado será x”, e “o resultado da moeda será y”.
- As 12 possibilidades correspondem às afirmações

$$\begin{array}{ll} D(1) \wedge M(\texttt{cara}) & D(1) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(2) \wedge M(\texttt{cara}) & D(2) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(3) \wedge M(\texttt{cara}) & D(3) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(4) \wedge M(\texttt{cara}) & D(4) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(5) \wedge M(\texttt{cara}) & D(5) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(6) \wedge M(\texttt{cara}) & D(6) \wedge M(\texttt{coroa}) \end{array} \tag{1}$$

- Estas afirmações são mutuamente exclusivas e esgotam todas as possibilidades, portanto a soma de suas probabilidades deve ser 1. Se não temos nenhuma razão para suspeitar que o dado de alguma maneira influencie a moeda, ou vice-versa, então é razoável atribuir a mesma probabilidade (1/12) a estas 12 afirmações.
- Note que 1/12 é o produto de $\Pr(D(x)) = 1/6$ e $\Pr(M(y)) = 1/2$.
- Temos portanto que $\Pr(D(x) \wedge M(y)) = \Pr(D(x)) \Pr(M(y))$ para quaisquer x e y.
- Este é um exemplo de uma regra geral, o **princípio da independência**.
- Por definição, duas afirmações P e Q são ditas **independentes** se e somente se

$$\Pr(P \wedge Q) = \Pr(P) \Pr(Q) \tag{2}$$

Exercício: Dois dados, um vermelho e um verde, são atirados ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de que o resultado do dado vermelho seja menor que 4, e o do dado verde seja maior que 1?

Relação com a lógica clássica

- A teoria da probabilidade inclui a lógica clássica como caso particular. Mais precisamente, atribuir probabilidade 0 a uma afirmação equivale a acreditar que a afirmação é falsa; e atribuir probabilidade 1 equivale a acreditar que ela é verdadeira.
- Se todas as afirmações tem probabilidade 0 ou 1, as regras e conceitos da lógica clássica podem ser traduzidos por regras e conceitos da probabilidade. Por exemplo, o conetivo $P \to Q$ equivale a afirmar que $\Pr(Q|P) = 1$.

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** é uma variável (parâmetro, quantia) X cujo valor é conhecido apenas parcialmente, no sentido probabilístico.
- Isto é, sabemos que o valor de X é algum elemento de um certo conjunto D, o **domínio** da variável; e, para qualquer v em D, temos uma medida de probabilidade $\Pr(X = v)$ para a afirmação "$X = v$".
- A função que a cada $v \in D$ associa a probabilidade $\Pr(X = v)$ é chamada de **distribuição de probabilidade** (ou simplesmente **distribuição**) da variável X.
- Observe que, se u e v são elementos distintos de D, então as afirmações "$X = u$" e "$X = v$" são mutuamente exclusivas.
- Além disso, sabemos que existe algum elemento v em D tal que a afirmação "$X = v$" é verdadeira. Pelo princípio de inclusão e exclusão, temos portanto que

$$\sum_{v \in D} \Pr(X = v) = 1$$

- Observe também que, nestas condições, temos que atribuir $\Pr(X = v) = 0$ para qualquer valor v que não está no conjunto D.

Exemplo:

- Um dado foi lançado, mas o resultado da jogada ainda está oculto.
- Seja X a variável aleatória cujo valor é esse resultado. Sabemos que o domínio de X é o conjunto $D = \{1, 2, \ldots, 6\}$.
- Como não temos motivos para distinguir entre esses resultados, é razoável atribuir probabilidades iguais $(1/6)$ para cada valor em D, e probabilidade zero para qualquer outro valor.
- Em particular, $\Pr(X = 3) = \Pr(X = 5) = 1/6$, e $\Pr(X = 0) = \Pr(X = 7) = \Pr(X = 1/2) = 0$.

- Variáveis aleatórias com valores numéricos podem ser combinadas com operações aritméticas e funções matemáticas, resultando em outras variáveis aleatórias.
- Por exemplo, se α é um número real, a fórmula $\alpha X + \sqrt{Y}$ denota a variável aleatória cujo valor é $\alpha u + \sqrt{v}$, onde u é o valor de X e v o valor de Y.
- A distribuição dessa nova variável é determinada pelas distribuições de probabilidades de X e de Y.

Exercício: Sejam X e Y os resultados obtidos atirando-se dois dados de cores diferentes, cada um com distribuição uniforme de probabilidades. Determine a distribuição das seguintes variáveis derivadas de X e Y:

1. X^2
2. $X \bmod 3$
3. $X + Y$
4. $\min\{X, Y\}$

- Só vamos tratar de variáveis aleatórias cujos domínios são conjuntos discretos (finitos ou enumeráveis).
- A teoria pode ser estendida para variáveis com domínios não enumeráveis, como os números reais, mas esse assunto merece uma disciplina à parte.

Variáveis aleatórias independentes

- Dizemos que duas variáveis aleatórias X e Y são **independentes** se e somente se, para quaisquer valores u e v em seus respectivos domínios,

$$Pr(X = u \wedge Y = v) = Pr(X = u)Pr(Y = v) \tag{3}$$

- Como no caso de proposições, é razoável supor que duas variáveis aleatórias são independentes quando **não** temos razão para supor que **o valor de uma tenha alguma influência no valor da outra**, ou que ambas sejam influenciadas por algum fator comum.
- Assim, por exemplo, é razoável supor que os valores obtidos por dois lances consecutivos do mesmo dado são variáveis independentes; pois os movimentos do dado durante o primeiro lance não influenciam seus movimentos no segundo lance.
- Por outro lado, não é razoável supor independência entre a altura e o peso de uma pessoa escolhida ao acaso; pois é razoável supor que pessoas mais altas tendem a ter peso maior.

- Também podemos supor que duas variáveis aleatórias **são independentes** mesmo que haja alguma **conexão física entre elas**, mas **não** temos razão para supor que essa conexão **afete as probabilidades** dos valores em alguma direção específica.
- Por exemplo, imagine que dois dados são colocados dentro de um copo que é agitado e entornado sobre a mesa.
- O movimento de cada dado afeta o movimento do outro, e ambos são afetados pelos movimentos do copo; mesmo assim, não temos razão para supor que obter um valor u em um dado aumente ou diminua as chances de obter valor v no outro dado.

Exercício: Sejam X e Y os resultados obtidos atirando-se dois dados de cores diferentes, cada um com distribuição uniforme de probabilidades. Suponha que as variáveis X e Y são independentes.

a) Sejam $S = X + Y$ e $D = X - Y$. As variáveis S e D são independentes? Justifique.

Valor esperado

- Um uso importante (e o mais antigo) da teoria da probabilidade é avaliar o ganho ou perda que pode decorrer de uma escolha ou acontecimento cujo resultado é desconhecido, como por exemplo uma aposta ou um investimento na bolsa.
- Suponha por exemplo que atiramos uma moeda e apostamos R\$ 30 contra R\$ 10 que o resultado será cara.
- Temos igual chance de ganhar R\$ 10 (se sair cara) e perder R\$ 30 (se sair coroa).
- Ou seja,

$$\text{Pr(“nosso ganho será R\$ +10”)} = \text{Pr(“nosso ganho será R\$ −30”)} = \frac{1}{2}$$

- Intuitivamente, se repetirmos essa aposta n vezes, em aproximadamente metade das vezes vamos ganhar 10 e na outra metade perder 30; portanto o ganho por aposta, em média, será aproximadamente

$$\frac{\frac{n}{2}(\text{R\$}\,{+10}) + \frac{n}{2}(\text{R\$}\,{-30})}{n} = \text{R\$}\,{-10} \tag{4}$$

- Em geral, suponha que temos uma variável aleatória X que pode assumir qualquer valor de um conjunto de valores numéricos D. O **valor médio esperado** (ou simplesmente o **valor esperado**) de X é, por definição

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{v \in D} v \Pr(X = v) \tag{5}$$

- Para entender esta fórmula, suponha que temos uma coleção grande com N variáveis, todas elas semelhantes a X mas tais que o valor de uma delas não tem influência nos valores das outras. Nesse caso, o número de variáveis que tem valor v será aproximadamente $N \Pr(X = v)$.

- Observe que se D tem um número finito n valores distintos, e todos os valores de D são igualmente prováveis, então $\Pr(X = v) = 1/n$, e a fórmula do valor esperado (5) reduz-se à média aritmética dos elementos de D.

  Exercício: Furar um poço de petróleo em determinada região custa R\$500.000, e tem 30% de chance de encontrar óleo. Se isso acontecer, o poço pode ser vendido por R\$800.000. Caso contrário o investimento é totalmente perdido. Qual o ganho esperado por poço?