

Lista 3 - MC458 - Gabarito

Tema: Indução Matemática

1. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Demonstração:

Procederemos por indução matemática sobre $n \geq 0$.

- **Base ($n = 0$):** O lado esquerdo resulta em $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$. O lado direito fornece $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$. A base é válida.
- **Passo Indutivo:** Assuma como hipótese de indução (HI) que a igualdade vale para algum $k \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$$

Queremos provar que a tese vale para $k+1$, isto é, $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \left(\sum_{i=0}^k 2^i \right) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad (\text{pela HI}) \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Portanto, provamos por indução que a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2. Prove que para todo $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demonstração:

Por indução sobre $n \geq 1$:

- **Base ($n = 1$):** Lado esquerdo: $1^2 = 1$. Lado direito: $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. A base é satisfeita.
- **Passo Indutivo:** Suponha válida para $k \geq 1$: $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (HI). Para

$k + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad (\text{pela HI}) \\ &= (k+1) \left[\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \right] \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Logo, a igualdade vale para todo $n \geq 1$. □

3. Prove que para todo $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração:

Por indução sobre $n \geq 1$:

- **Base** ($n = 1$): $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, verdadeiro.
- **Passo Indutivo:** Suponha válida para $k \geq 1$, ou seja, $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$ (HI). Somando $(k+1)$ a ambos os lados:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$. □

4. Prove que todo inteiro maior do que 1 é primo ou é produto de primos.

Demonstração:

Utilizaremos o Princípio da Indução Forte sobre $n \geq 2$.

- **Base** ($n = 2$): O número 2 é primo, logo a afirmação é satisfeita.
- **Passo Indutivo:** Suponha como hipótese de indução forte que todo inteiro m tal que $2 \leq m \leq k$ é primo ou produto de primos. Queremos analisar o inteiro $k+1$.
 - Se $k+1$ for primo, a propriedade se cumpre imediatamente.
 - Se $k+1$ for composto, existem inteiros a e b tais que $k+1 = a \cdot b$, com $2 \leq a, b \leq k$. Pela hipótese de indução forte, tanto a quanto b são primos ou podem ser decompostos em produto de fatores primos. Assim, $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ e $b = q_1 q_2 \cdots q_s$, de modo que:

$$k+1 = a \cdot b = (p_1 \cdots p_r)(q_1 \cdots q_s)$$

o que expressa $k+1$ como um produto de números primos.

Logo, pelo Princípio da Indução Forte, todo inteiro $n \geq 2$ é primo ou produto de primos. $\square$

5. Prove que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n é um inteiro não negativo.

Nota sobre a notação: A notação $a \mid b$ (lê-se: « a divide b » ou « b é divisível por a ») significa formalmente que existe um inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot m$. Em particular, $5 \mid (n^5 - n)$ significa demonstrar que $(n^5 - n)$ é um múltiplo de 5.

Demonstração:

Por indução sobre $n \geq 0$:

- **Base ($n = 0$):** $0^5 - 0 = 0 = 5 \cdot 0$. Como $5 \mid 0$, a base é verdadeira.
- **Passo Indutivo:** Assuma que $5 \mid (k^5 - k)$ para algum $k \geq 0$, ou seja, $k^5 - k = 5m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$ (HI). Para $n = k + 1$, expandindo pelo Teorema Binomial:

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k+1) \\&= (k^5 - k) + (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k) \\&= 5m + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \quad (\text{usando a HI}) \\&= 5 \cdot [m + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k]\end{aligned}$$

Como a expressão entre colchetes é um inteiro, segue que $5 \mid ((k+1)^5 - (k+1))$.

Logo, $5 \mid (n^5 - n)$ para todo inteiro não negativo n . $\square$

6. Prove que qualquer valor postal maior ou igual a 8 unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5.

Demonstração:

Demonstraremos por Indução Forte sobre $n \geq 8$.

- **Casos Base ($n = 8, 9, 10$):**
 - $n = 8$: 1 selo de 3 e 1 selo de 5 ($3 + 5 = 8$).
 - $n = 9$: 3 selos de 3 ($3 \cdot 3 = 9$).
 - $n = 10$: 2 selos de 5 ($2 \cdot 5 = 10$).

Os 3 casos base consecutivos são válidos.

- **Passo Indutivo:** Assuma que para todo inteiro m tal que $8 \leq m \leq k$ (com $k \geq 10$), o valor m pode ser formado por selos de 3 e 5. Queremos compor o valor $k + 1$. Como $k \geq 10$, temos $(k+1) - 3 = k - 2 \geq 8$.
Portanto, o valor $(k - 2)$ recai no intervalo da hipótese de indução e pode ser obtido com selos de 3 e 5. Basta acrescentar mais um selo de valor 3 a essa combinação para obter exatamente o valor:

$$(k - 2) + 3 = k + 1$$

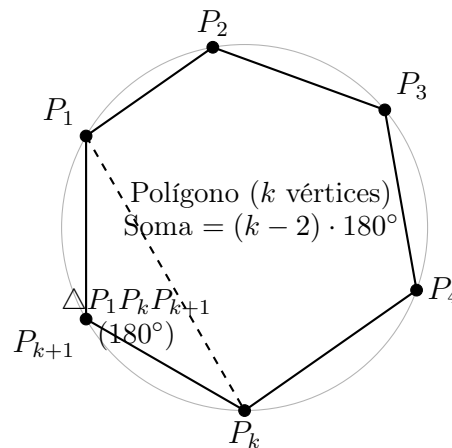
Por indução, qualquer valor postal $n \geq 8$ pode ser obtido. $\square$

7. Prove que para todo $n \geq 3$, se n pontos distintos dispostos em um círculo são conectados consecutivamente por linhas retas, então a soma dos ângulos internos do polígono resultante soma $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Demonstração:

Procederemos por indução sobre o número de vértices $n \geq 3$:

- **Base ($n = 3$):** Três pontos consecutivos sobre o círculo formam um triângulo convexo $\triangle P_1 P_2 P_3$. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $(3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$, o que satisfaz a base.
- **Passo Indutivo:** Assuma por hipótese de indução (HI) que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono cíclico convexo de k vértices ($k \geq 3$) é $(k - 2) \cdot 180^\circ$. Considere agora $k + 1$ pontos dispostos ciclicamente em ordem sobre a circunferência: $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}$. Ao traçar a corda/diagonal ligando P_1 a P_k , dividimos o polígono original de $k + 1$ lados em duas figuras disjuntas:
 1. O polígono de k vértices $P_1 P_2 \dots P_k$;
 2. O triângulo adicional $\triangle P_1 P_k P_{k+1}$.



Os ângulos internos do polígono completo nos vértices P_1 e P_k são simplesmente a soma dos ângulos correspondentes do polígono de k lados com os ângulos do triângulo $\triangle P_1 P_k P_{k+1}$. Nos demais vértices, os ângulos não se alteram.

Portanto, a soma total dos ângulos internos S_{k+1} é:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + \text{Soma}(\triangle P_1 P_k P_{k+1}) \\
 &= (k - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ \quad (\text{pela HI}) \\
 &= (k - 2 + 1) \cdot 180^\circ \\
 &= ((k + 1) - 2) \cdot 180^\circ
 \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução, a fórmula é válida para todo $n \geq 3$. □

8. Prove que para qualquer inteiro positivo n uma grade quadrada $2^n \times 2^n$ com um quadrado removido pode ser ladrilhada com ladrilhos em formato de L (trominós formados por 3 quadrados 1×1).

Demonstração:

Procederemos por indução sobre a potência $n \geq 1$:

- **Base ($n = 1$):** Uma grade $2^1 \times 2^1$ contém 4 células de tamanho 1×1 . Removendo qualquer uma das 4 células, sobram exatamente 3 células adjacentes que formam a geometria exata de um único ladrilho em L (trominó).



Caso Base: grade 2×2

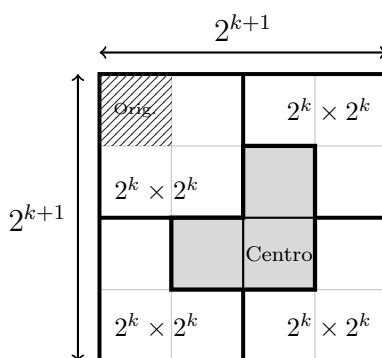
Portanto, a base é trivialmente satisfeita.

- **Passo Indutivo:** Assuma por hipótese de indução (HI) que qualquer grade $2^k \times 2^k$ ($k \geq 1$) com uma célula qualquer removida pode ser completamente ladrilhada por peças em L.

Considere agora uma grade de dimensão $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com uma célula arbitrária removida. Dividimos a grade ao meio horizontalmente e verticalmente por retas centrais, particionando-a em quatro quadrantes de dimensões $2^k \times 2^k$:

- A célula originalmente removida pertence a exatamente um desses quatro quadrantes.
- Os outros três quadrantes permanecem inicialmente intactos e completos.

Colocamos então um único ladrilho em formato de L exatamente no centro da grade, cobrindo uma célula de cada um dos três quadrantes intactos (escolhendo os três cantos que se encontram no centro da grade):



Após posicionar essa peça central:

1. O quadrante que continha o quadrado originalmente removido continua tendo exatamente uma célula faltante.
2. Cada um dos outros três quadrantes agora tem exatamente uma célula ocupada pelo ladrilho central, o que equivale a um quadrado removido no seu respectivo canto interno.

Dessa forma, reduzimos o problema a quatro subgrades independentes de tamanho $2^k \times 2^k$, cada uma com exatamente uma célula removida. Pela hipótese de indução (HI), cada um dos quatro quadrantes pode ser perfeitamente ladrilhado.

Conclui-se, por indução, que qualquer grade $2^n \times 2^n$ deficiente de uma célula pode ser ladrilhada por ladrilhos em L. $\square$