Teoria dos Jogos

Hokama PhD

13 de abril de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Mais um batedor de pênalti.

	Esq	Dir
Esq	0.6, 0.4	0.8, 0.2
Dir	0.9, 0.1	0.7, 0.3

- Qual a estratégia Maxmin para o jogador 1?
- Qual a utilidade para o Jogador 1?

		y	(1-y)
		Esq	Dir
x	Esq	0.6, 0.4	0.8, 0.2
(1-x)	Dir	0.9, 0.1	0.7, 0.3

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0.6xy + 0.8x(1-y) + 0.9(1-x)y + (1-x)(1-y)0.7 && (1)\\
&= 0.6xy + 0.8x - 0.8xy + 0.9y - 0.9xy + (1 - y - x + xy)0.7 && (2)\\
&= 0.6xy + 0.8x - 0.8xy + 0.9y - 0.9xy + 0.7 - 0.7y - 0.7x + 0.7xy && (3)\\
&= -0.4xy + 0.1x + 0.2y + 0.7 && (4)\\
&= y(0.2 - 0.4x) + 0.7 + 0.1x && (5)
\end{aligned}
$$

- Tiramos a derivada parcial em relação a y.

$$\frac{\partial y(0.2 - 0.4x) + 0.7 + 0.1x}{\partial y} = 0.2 - 0.4x$$

- Três coisas podeiam acontecer:
  - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} > 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Nesse caso, quanto maior meu y, maior é a recompensa do jogador 1, então o jogador 2 deve jogar $y = 0$.
  - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Nesse caso, o jogador 2 deve jogar $y = 1$.
  - existe um $x \in [0, 1]$, tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$. Existe uma estratégia do jogador 1 que faz o jogador 2 indiferente. Essa é a estratégia Minmax do jogador 1.

Analogamente vamos verificar a estratégia do batedor

		y	(1-y)
		Esq	Dir
x	Esq	0.6, 0.4	0.8, 0.2
(1-x)	Dir	0.9, 0.1	0.7, 0.3

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0.6xy + 0.8x(1-y) + 0.9(1-x)y + (1-x)(1-y)0.7 && (6)\\
&= 0.6xy + 0.8x - 0.8xy + 0.9y - 0.9xy + (1 - y - x + xy)0.7 && (7)\\
&= 0.6xy + 0.8x - 0.8xy + 0.9y - 0.9xy + 0.7 - 0.7y - 0.7x + 0.7xy && (8)\\
&= -0.4xy + 0.1x + 0.2y + 0.7 && (9)\\
&= x(0.1 - 0.4y) + 0.2y + 0.7 && (10)
\end{aligned}$$

- Dessa forma, computamos

$$\begin{aligned}
0.2 - 0.4x &= 0\\
x &= \frac{0.2}{0.4}\\
x &= 0.5
\end{aligned}$$

$$u_1 = -0.4xy + 0.1x + 0.2y + 0.7 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial x(0.1 - 0.4y) + 0.2y + 0.7}{\partial x} = 0.1 - 0.4y \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}
0.1 - 0.4y &= 0 && (13)\\
y &= \frac{0.1}{0.4} && (14)\\
y &= 0.25 && (15)
\end{aligned}$$

Equilíbrio Correlacionado: Intuição

- Na batalha do relacionamento, intuitivamente parece uma boa solução se 50% das vezes obtivermos (CR, CR) e 50% (TR, TR);
- Mas nenhum dos 3 equilíbrios que vimos chega nesse resultado.

	CR	TR
CR	2, 1	0, 0
TR	0, 0	1, 2

- Outro Exemplo: Jogo do Tráfego.

	vai	espera
vai	-10, -10	1, 0
espera	0, 1	-1, -1

Solução

- Uma solução natural é colocar um semáforo: Um dispositivo aleatorizado justo, que diz para um jogador ir e para o outro esperar.
- Benefícios:
  - A recompensa negativa é evitada (se todos obedecerem o sinal)
  - É justo.
  - A soma do beneficio social pode exceder o beneficio de todos os Equilíbrio de Nash.
- Poderíamos usar uma ideia dessas para encontrar um resultado justo na Batalha do Relacionamento.

Equilíbrio Correlacionado

- Informalmente um **Equilíbrio Correlacionado** é uma atribuição aleatorizada de recomendações de ações para os agentes, tal que nenhum jogador gostaria de desviar.

Tempo

- Cortez e os barcos.

- Ulysses e as Sereias.

Jogos na Forma Extensiva com Informação Completa

- O jogo mais simples que envolve tempo.
- Nos jogos em Forma Normal, consideramos que os jogadores jogavam suas estratégias simultaneamente.
- Para jogos em que existe uma sequência essa representação não é tão precisa.
- Para considerar a estrutura **temporal** explicitamente usaremos a **forma extensiva**.
- Duas variantes:
  - Informação Completa
  - Informação Incompleta

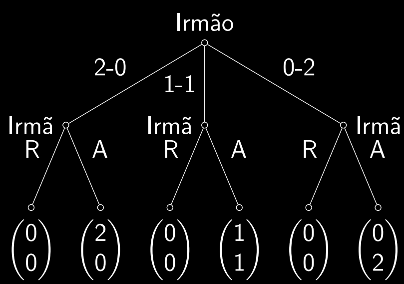
Um **Jogo Finito de Informação Completa** na forma extensiva é definido pela tupla $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$, em que:

- N é o conjunto dos n jogadores.
- A é o conjunto de ações (único para todos os jogadores).
- Nós de decisão H, que são nós internos (não folhas/terminais)
  - Função de ação $\chi : H \to 2^A$, que mapeia para cada nó de decisão, quais escolhas o jogador da vez pode tomar.
  - Função de jogador $\rho : H \to N$, que mapeia cada nó interno com qual jogador $i \in N$ que vai escolher uma ação.

- Nós terminais Z, disjuntos de H.
- Função de sucessor $\sigma : H \times A \rightarrow H \cup Z$ que mapeia pra cada nó de decisão e ação para um novo nó (interno ou terminal).
  - Essa função deve formar uma árvore, ou seja, para todo $h_1, h_2 \in H$ e $a_1, a_2 \in A$, se $\sigma(h_1, a_1) = \sigma(h_2, a_2)$ então $h1 = h2$ e $a_1 = a_2$.
  - Cada nó codifica a história das ações tomadas pelos jogadores até aquele momento.
- Funções de Utilidade: $u = (u_1, \ldots, u_n)$; $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ que representa a utilidade para o jogador i em cada nó terminal de Z

Exemplo: Jogo da Divisão

Considere o seguinte jogo: Um irmão e uma irmã poderão dividir R$ 2 (em duas moedas de R$1), o irmão vai sugerir como é a divisão e a irmã vai aceitar ou rejeitar. Caso ela aceite cada um fica com a divisão proposta, caso rejeite nenhum dos dois ganha nada.



- Quantas estratégias puras tem cada jogador?
- resp: Irmão (J1): 3, Irmã (J2): 8

Estratégias Puras

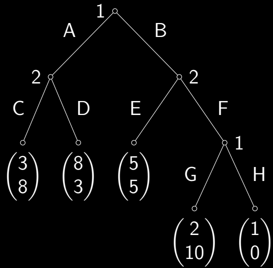
- Uma estratégia pura para um jogador em um jogo de informação completa é uma **especificação completa** de quais ações serão tomadas em cada nó daquele jogador.

Definição: Estratégia Pura

Seja $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ um jogo de informação completa na forma extensiva. Então as **estratégias puras** do jogador i consistem no produto vetorial

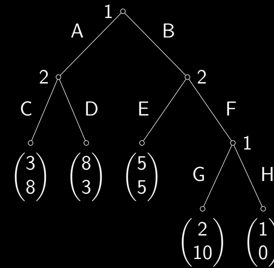
$$\prod_{h \in H, \rho(h) = i} \chi(h)$$

Exemplos de Estratégias Puras



- Quais as estratégias puras do Jogador 2?

$$S_2 = \{(C, E), (C, F), (D, E), (D, F)\}$$



- Quais as estratégias puras do Jogador 1?
  $S_1 = \{(B, G), (B, H), (A, G), (A, H)\}$
- Se o Jogador 1 escolha A, ele nunca tenha que escolher G ou H, mesmo assim (A, G) e (A, H) ainda são estratégias puras e distintas.

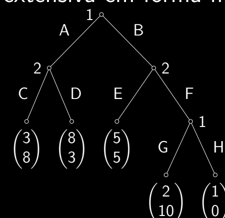
Equilibrio de Nash

Dado essa definição de estratégia pura, as seguintes definições continuam as mesmas dos jogos em forma normal.

- Estratégias Mistas
- Melhor Respostas
- Equilibrio de Nash

Forma Normal Induzida

Podemos converter qualquer jogo na forma extensiva em forma normal.



	CE	CF	DE	DF
AG	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
AH	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
BG	5, 5	2, 10	5, 5	2, 10
BH	5, 5	1, 0	5, 5	1, 0

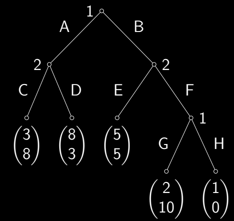
- Note que a forma normal não é compacta, temos 16 pares de recompensas, ao invés das 5.
- A tabela cresce exponencialmente (tente acrescentar uma aresta).

- Nem sempre é possível converter um jogo na forma normal em um jogo de informação completa na forma extensiva, em particular se for importante que os agentes façam suas escolhas simultaneamente.
  - No jogo de combinar moedas por exemplo, o jogo mudaria completamente se um jogador mostrasse sua escolha antes do outro.

Teorema

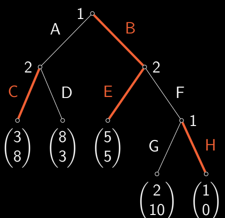
Todo **jogo de informação completa na forma extensiva** tem um equilíbrio de Nash de estratégia pura.

Intuição: estratégias mistas servem para confundir o adversário, mas os jogadores sabem todas as jogadas anteriores a sua.



	CE	CF	DE	DF
AG	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
AH	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
BG	5, 5	2, 10	5, 5	2, 10
BH	5, 5	1, 0	5, 5	1, 0

- Esse jogo tem um equilíbrio de Nash de estratégia pura? Se sim quais?
  - Pelo teorema anterior, sabemos que existe pelo menos um equilibrio de Nash de estratégia pura.
  - (A, G), (C, F)
  - (A, H), (C, F)
  - (B, H), (C, E)



- De fato $\langle (B, H), (C, E) \rangle$ é um equilíbrio de Nash.
- Mas é estranho considerar que o Jogador 1 jogaria H e não G caso essa decisão fosse necessária.
- Se os jogares estiverem tentando maximizar sua recompensa, realmente J1 não jogaria H.
- Então H é chamado de uma **ameaça sem credibilidade**, ou uma **ameaça vazia**.

Definição: subjogo de G com raiz h

O **subjogo de G com raiz h** é a restrição de G a h e seus descendentes.

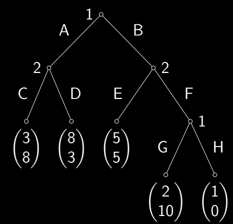
Definição: subjogos de G

O **conjunto de subjogos de G** é definido pelos subjogos de G com raiz em cada nó de G.

Definição: Equilíbrio Perfeito em Subjogos

s é um **Equilíbrio Perfeito em Subjogos** de G se, e somente se, para qualquer subjogo G' de G, a restrição de s para G' é um equlibrio de nash de G'.

- Como G é seu próprio subjogo, todo equilíbrio perfeito em subjogos é um equilíbrio de Nash.
- Um equilíbrio perfeito em subjogos elimina ameaças vazias.



- Quais equilíbrios são perfeitos em subjogos?
  - (A, G), (C, F): é perfeito em subjogos
  - (A, H), (C, F): H é uma ameaça vazia, não é perfeito em subjogos
  - (B, H), (C, E): H é uma ameaça vazia, mesmo que ela não seja jogada. Também não é perfeito em subjogos

Achando Equilíbrio Perfeito em Subjogos

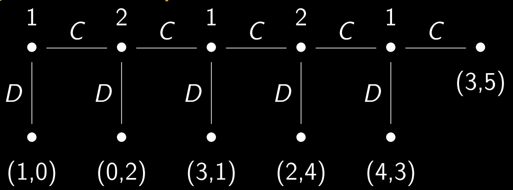
Vamos procurar o equilíbrio dos subjogos menores (mais baixos), cada equilíbrio alcança um resultado, e consideramos esse resultado para os nós superiores.

Algoritmo 1: BackwardInduction

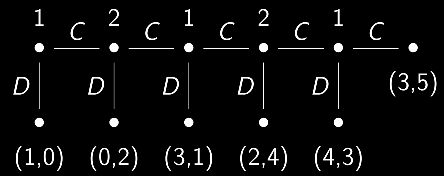
Entrada: Um nó h
Saída: Um perfil de utilidade $u(h)$
se $h \in Z$ **então devolva** $u(h)$;
melhor_util $\leftarrow -\infty$;
para todo $a \in \chi(h)$ **faça**
  atual_util $\leftarrow$ BackwardInduction($\sigma(h, a)$);
  se *atual_util*$[\rho(h)] >$ *melhor_util*$[\rho(h)]$ **então**
    melhor_util $\leftarrow$ *atual_util*;
devolva melhor_util;

- Note que o algoritmo considera que em cada nó, o jogador vai tomar a ação que maximiza sua utilidade.
- Para jogos de soma zero, BackwardInduction tem outro nome: Algoritmo **minimax**.
- É possível deixar o algoritmo mais rápido, podando nós que nunca serão alcançados, essa técnica é conhecida como "alpha-beta pruning".

Jogo da Centopeia



- No jogo da centopeia, dois jogadores disputam uma recompensa financeira. Começando pelo jogador 1, em cada rodada um jogador tem duas ações possíveis "Desistir" ou "Continuar"
- Se desiste, o jogo termina, e os jogadores recebem as recompensas conforme a árvore acima.



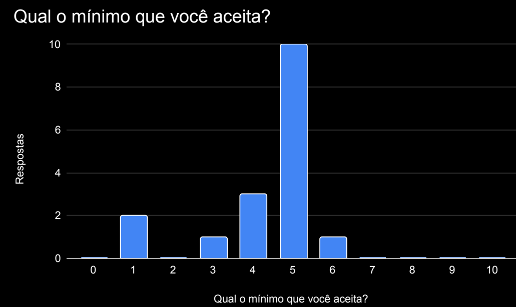
- O que acontece se executarmos o BackwardInduction no jogo acima?
- O único equilíbrio é com o jogador 1 desistindo imediatamente na primeira rodada.
- Esse resultado é Pareto-dominado por todos exceto um resultado.

- Curiosamente, humanos não desistem logo nas primeiras rodadas.
- Considerando o Equilíbrio Perfeito em Subjogos, caso o jogador 1 não desista logo no primeiro movimento, o jogador 2 deveria desistir logo na segunda.
- Mas dado que o jogador 1 não desistiu, deveria o jogador 2 atualizar suas crenças?

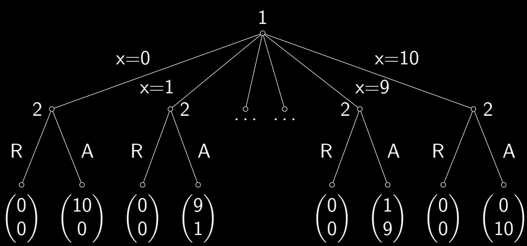
Jogo do Ultimado

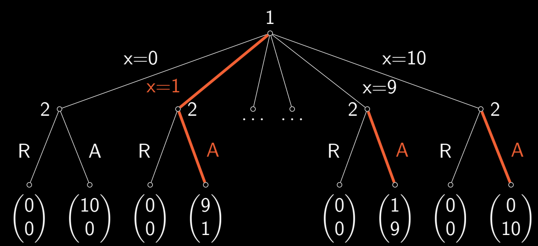
No jogo do Ultimato R$ 10 reais estão na mesa. O jogador 1 oferece x para o Jogador 2. Se o jogador 2 aceitar, fica com x e o jogador 1 fica com $(10 - x)$. Caso o jogador 2 recuse, ambos levam 0.

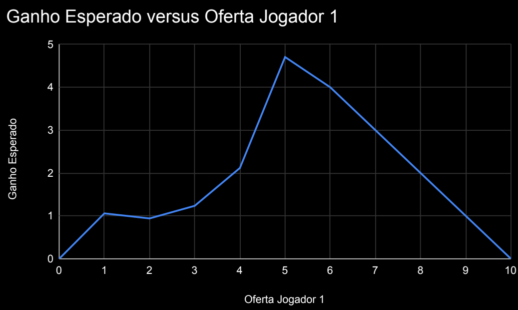
- Se você é o Jogador 1, quanto você oferece?
- Se você é o Jogador 2, qual o mínimo que você aceita?



Observamos que 65% dos respondentes preferem não ganhar nada do que ganhar R$ 4 reais.







Esse gráfico diz que nessa população, de fato oferecer 5 maximiza o ganho esperado.

O valor importa?

- Parece simples recusar 1 real. Mas e se ao invés dos R$10 iniciais, tivéssemos digamos 1 milhão?
- Você recusaria R$ 100000?
- Robert Slonim e Alvin Roth (1998) "Learning in High Stakes Ultimatum Games: An Experiment in the Slovak Republic", *Econometrica*, Vol 66, pp 569-596.
- Variando entre 60, 300 até 1500 Coroas Eslovacas.
- O salário médio na época era 5500. Então 1500 correspondia a uma semana de salário.

- Não se percebeu diferença significativa nas ofertas:

valor	média	mediana
60	45.1%	46.5%
300	46.0%	48.0%
1500	42.3%	45.0%

- Quando era ofertado 25% do valor
  - 60 coroas: 100% rejeição
  - 300 coroas: 47,6% rejeição
  - 1500 coroas: 37,5% rejeição

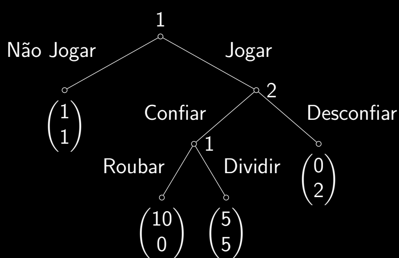
- Seriam então os respondentes irracionais? Claro que não.
- Uma hipótese é que as recompensas não estão bem descritas. Ela descreve o ganho monetário, mas a recompensa dos jogadores pode estar relacionada com algum critério de igualdade.
- Teoria dos Jogos Comportamental (Além do Escopo desse Curso)

- Apesar disso os Equilíbrios Perfeitos em Subjogos, são capazes de analisar jogos em que os jogadores são racionais (e temos as recompensas bem calculadas)
- Exemplo: Jogo da velha.
- Impõe credibilidade em circunstancias que não são alcançadas. (Elimina as Ameaças Vazias)
- Alguns jogos são muito difíceis de calcular: Xadrez.

Exercício

- Como você divide o bolo com seu irmão sem causar briga?

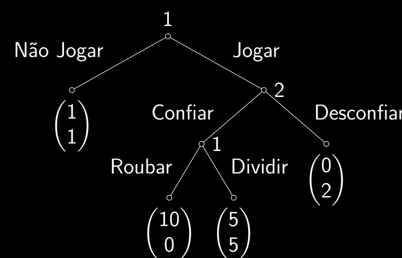
Exercício



Quais os equilibrios de Nash de estragia pura?

$$\langle (\text{Não Jogar}, \text{Dividir}), (\text{Desconfiar}) \rangle$$
$$\langle (\text{Não Jogar}, \text{Roubar}), (\text{Desconfiar}) \rangle$$

Exercício



Quais os equilibrios perfeito em subjogos?

$$\langle (\text{Não Jogar}, \text{Roubar}), (\text{Desconfiar}) \rangle$$