

Teoria dos Jogos

Hokama PhD

27 de abril de 2023

- ▶ Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. <https://www.coursera.org/learn/game-theory-1>
- ▶ Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. <https://timroughgarden.org/f13/f13.html>
- ▶ Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- ▶ Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Jogo de Informação Incompleta na Forma Extensiva

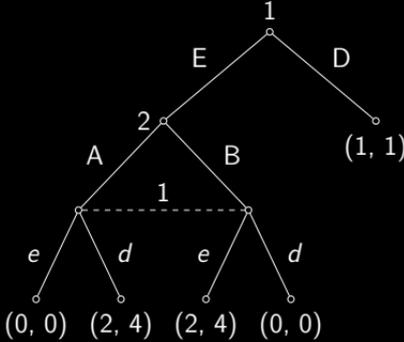
- ▶ Alguns jogos, como o Poker, também acontecem de forma sequencial.
- ▶ Porém cada jogador vê algumas das cartas, mas não todas.
- ▶ Os jogadores vêm as apostas e reagem a elas.
- ▶ Crença na racionalidade e motivações dos outros jogadores.
- ▶ Muitas mãos possíveis, muitas estratégias possíveis, impossível de desenhar essa árvore, porém podemos aprender algo com esse tipo de jogo.

Definições e Estratégias

- ▶ Nos jogos que vimos até agora, os jogadores podiam escolher uma ação em cada nó de escolha.
 - ▶ Isso implica que os jogadores sabiam em que nó eles estavam e todas as ações jogadas até aquele momento.
 - ▶ Vamos modelar jogos em que os agentes precisam agir com informação parcial ou com nenhuma informação das ações tomadas pelos outros jogadores, ou até por eles mesmos.
- ▶ Em Jogos de **Informação Incompleta** na forma extensiva.
 - ▶ os nós de escolha dos jogadores são particionados em **conjuntos de Informação**.
 - ▶ os agentes não podem distinguir entre nós de escolha dentro do mesmo conjunto de informação.

Exemplo

O J_1 não consegue distinguir se J_2 jogou A ou B .
 Note que as ações possíveis nesses nós são necessariamente as mesmas.

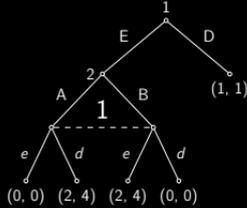
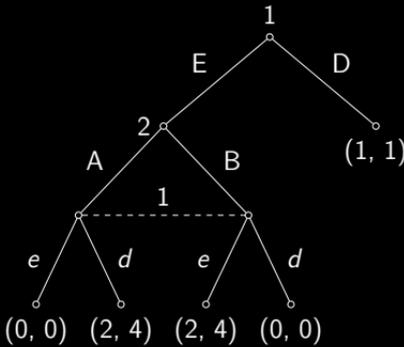


Definição: Jogo de informação incompleta

Um **Jogo de Informação Incompleta** na forma extensiva é uma tupla $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u, I)$, em que:

- ▶ $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ é um jogo de informação completa na forma extensiva, e
- ▶ $I = (I_1, \dots, I_n)$, em que $I_i = (I_{i,1}, \dots, I_{i,k_i})$ é uma relação de equivalência em $\{h \in H : \rho(h) = i\}$ com a propriedade que $\chi(h) = \chi(h')$ sempre que existir um j para o qual $h \in I_{i,j}$ e $h' \in I_{i,j}$.

Estratégias



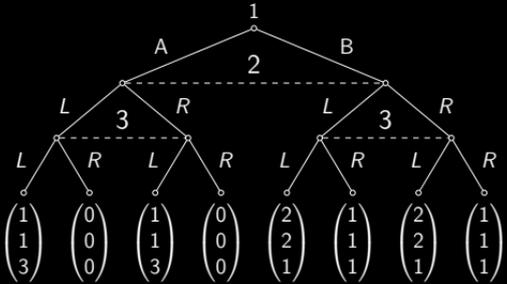
- ▶ Quais são as classes de equivalência para cada jogador?
- ▶ Como serão definidas estratégias puras de cada jogador?

- ▶ Escolha de uma ação a cada classe.
- ▶ As estratégias puras do jogador i são:

$$\prod_{I_{i,j} \in I_i} \chi(I_{i,j})$$

- ▶ $S_1 = Ee, Ed, De, Dd$

Exercício

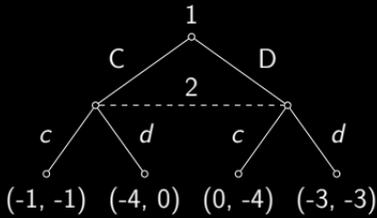


Qual é o conhecimento do jogador 2 e 3 a respeito da jogada do jogador 1? Qual o conhecimento do jogador 3 a respeito da jogada do jogador 2?

Forma Normal Induzida

- ▶ Da mesma forma que no jogo de informação completa, podemos reduzir os jogos de informação incompleta na forma extensiva, para um jogo na forma normal.
- ▶ Estratégias mistas são distribuições de probabilidade das estratégias puras.
- ▶ Equilíbrios de Nash são preservados.
- ▶ Note então que podemos transformar um jogo na forma extensiva (inf. completa ou incompleta) em um jogo na forma normal, e um jogo na forma normal em um jogo de informação incompleta na forma extensiva.
 - ▶ Podemos acabar com jogos diferentes,
 - ▶ Mas com as mesmas estratégias e equilíbrios.

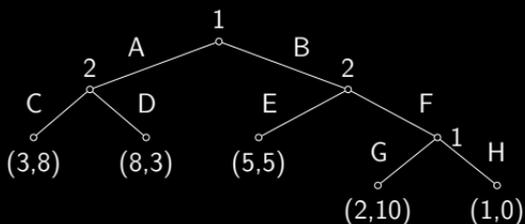
▶ Podemos representar qualquer jogo na forma normal como um jogo de informação incompleta na forma extensiva. (ex: dil. presi.)



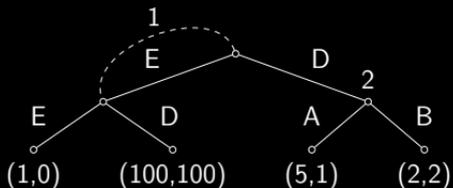
- ▶ Note que os jogadores fazem escolhas sem saber qual a ação do outro.
- ▶ Dessa forma é como se os jogadores estivessem fazendo escolhas simultâneas. (Podemos colocar J2 na raiz da árvore)

Estratégias Mistas e Comportamentais

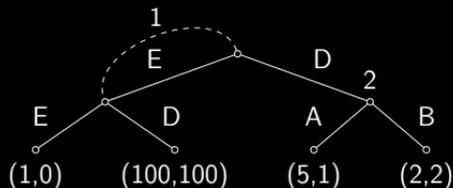
- ▶ Existem dois tipos diferentes de estratégias aleatorizadas em Jogos de Informação Incompleta na Forma Extensiva.
 - ▶ Estratégias Mistas
 - ▶ Estratégias Comportamentais
- ▶ **Estratégias Mistas:** aleatoriza entre as estratégias puras
- ▶ **Estratégias Comportamentais:** Distribuição independente em cada conjunto de informação.
 - ▶ Informalmente significa que o jogador faz um sorteio (seguindo essa distribuição) cada vez que precisa tomar uma decisão.



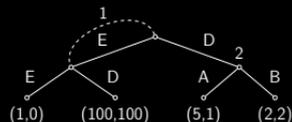
- ▶ Exemplo de uma estratégia comportamental:
 - ▶ Escolher A com probabilidade .5 e G com probabilidade .3
- ▶ Exemplo de uma estratégia mista:
 - ▶ (.6(A, G), .4(B, H))
- ▶ De fato, em jogos de inf. completa, estratégias comportamentais e mistas são equivalentes. Também é verdade em Jogos de Inf. Incompleta com **Lembrança Perfeita**.



- ▶ Em estratégia pura, o J1 escolhe entre E ou D para jogar em ambos os nós.
- ▶ Em estratégia mista, J1 também jogaria a mesma jogada em ambos os nós, mas sortearia jogar E com prob. p e D com prob. $(1 - p)$. Mas faria esse sorteio antes do jogo começar.
- ▶ B é dominante para J2. Para J1, D, B é melhor do que E, B. Então R, D é um equilíbrio.



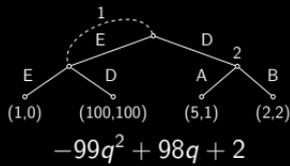
- ▶ Considere o caso de um time (J1) que precisa combinar uma estratégia, porém quando cada um do time jogar, ele não sabe se ele é o primeiro ou o segundo.
- ▶ Quais são as estratégias puras desse jogo?
 $J1 : \{E, D\}$ e $J2 : \{A, B\}$



- ▶ Note então que em estratégia mista, o prêmio de 100 é inacessível.
- ▶ Qual seria o equilíbrio em uma estratégia comportamental?
 - ▶ B ainda é dominante para J2.
 - ▶ Se o jogador usa a estratégia $(q, (1 - q))$ sua utilidade esperada é:

$$\begin{aligned}
 & q^2 + 100(q(1 - q)) + 0 + 2(1 - q) \\
 & \quad q^2 + 100(q - q^2) + 2 - 2q \\
 & \quad q^2 + 100q - 100q^2 + 2 - 2q \\
 & \quad -99q^2 + 98q + 2
 \end{aligned}$$

Resolvendo Jogos de Informação Incompleta na Forma Extensiva



- ▶ podemos encontrar a derivada.

$$\frac{d}{dq}(-99q^2 + 98q + 2) = 98 - 198q$$

- ▶ e encontramos seu máximo em

$$98 - 198q = 0$$

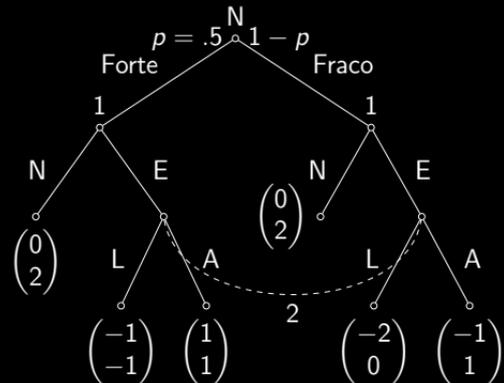
$$q = 98/198$$

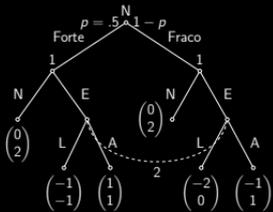
- ▶ portanto, $\langle (98/198, 100/198), B \rangle$ é um equilíbrio em estratégia comportamental.

- ▶ Com informação incompleta, é possível que não tenhamos os subjogos adequados.
- ▶ Mas podemos estender o raciocínio.

Considere o seguinte Jogo.

- ▶ Uma empresa $J1$ está decidindo se deve Entrar em um negócio ou Não.
- ▶ Já existe uma outra empresa $J2$ que já domina o mercado.
- ▶ $J1$ pode ser Forte ou Fraca nesse negócio, mas essa característica é aleatória (determinada pela natureza).
- ▶ $J1$ sabe se é forte ou não, porém $J2$ não sabe.
- ▶ $J2$ pode decidir Lutar por seu monopólio ou Aceitar o novo concorrente.





▶ Não é possível quebrar o jogo em subjogos. Então o único subjogo é o Jogo completo.

- ▶ Dessa forma, Equi. Perf. em Subjogos é o mesmo que o Equilíbrio de Nash.
- ▶ Um equilíbrio é $\langle (N, N), (L) \rangle$
- ▶ De fato, se $J1$ acredita que $J2$ vai lutar o melhor é não entrar. Porém L é uma estratégia dominada. Então é uma Ameaça Vazia.
- ▶ Outro equilíbrio é $\langle (E, N), (A) \rangle$

Ideias

- ▶ Tecnicamente ambos os equilíbrios são perfeitos em subjogos, porém podemos estender a ideia de uma ameaça vazia para racionalizar sobre o comportamento de cada Jogador.
- ▶ Existem conceitos que explicitamente modelam as crenças dos jogadores sobre onde eles estão na árvore. (Por exemplo, conhecendo as recompensas, se $J1$ entra no negócio, o que $J2$ entende?)

Ideias

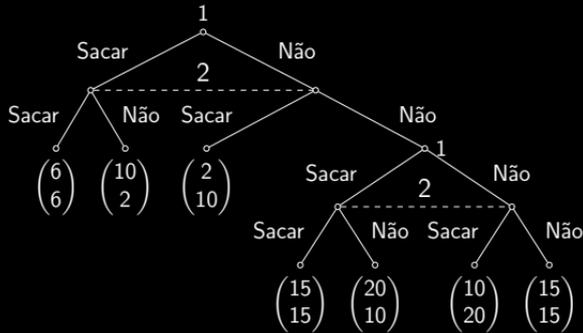
- ▶ Equilíbrio Sequencial e Equilíbrio Bayesiano Perfeito.
 - ▶ As crenças não são contraditórias pela ação do jogador.
 - ▶ Jogadores dão a melhor resposta baseado em suas crenças.
 - ▶ (Por enquanto, fora do escopo do curso)

Exercício

Considere o seguinte cenário.

- ▶ Dois investidores depositam 10\$ em um banco.
- ▶ O banco investe em um projeto longo.
- ▶ Se o banco precisar encerrar o projeto antes do final, recupera 12\$ (dos 20\$ investido).
- ▶ Se o banco espera o projeto terminar, recebe 30\$.
- ▶ Os investidores podem sacar em dois periodos.

Jogos Repetidos



Quais os equilíbrios perfeitos em subjogos?

$((N, S), (N, S)), ((S, S), (S, S))$

▶ Muitas interações acontecem mais de uma vez:

- ▶ Empresas em um *Marketplace*, competem entre si dia após dia.
- ▶ Alianças políticas se modificam repetidamente no tempo.
- ▶ Você ajuda o seus amigos quando eles precisam, eles te ajudam de volta?
- ▶ No trabalho seus colegas fazem a parte deles? Te ajudam quando você precisa? Você é recíproco?

Queremos entender como o aspecto da repetição afeta o Jogo.

- ▶ Comportamento cooperativo: O cartel funciona como um Dilema do Prisioneiro Repetido.
- ▶ Necessário observar as jogadas dos outros jogadores e reagir rapidamente para punir comportamentos não desejados.
- ▶ Precisa pensar no futuro. Pensar apenas no presente fará os jogadores desrespeitarem o acordo do Cartel.
- ▶ Em tempos de Guerras os jogadores querem produzir e vender para ter dinheiro.
- ▶ Funciona melhor com alguma estabilidade, ou seja, sem a entrada de novos jogadores, ou descobertas de novas fontes de petróleo. Crescimento de demanda é benéfico ao cartel.

Cartel

- ▶ OPEP é um Cartel dos países exportadores de petróleo.
- ▶ $\leq 38\$$ o barril entre 1930 e 1973. (em dolares ajustado pela inflação em 2023)
- ▶ Se o cartel concorda em diminuir a produção o preço sobe. Com o preço subindo os produtores tem um incentivo de produzir mais (quebrando o acordo do cartel).
- ▶ 70\$ o barril em 1976
- ▶ 149\$ o barril em 1982
- ▶ 40\$ entre 1986 até 2002 (Guerra entre Iran e Iraque, outros conflitos no oriente médio)
- ▶ 173\$ em 2008, 13\$ em 2020 (Covid)

Utilidade em Jogos Repetidos

- ▶ Em um jogo na forma normal, repetições envolvem jogar o mesmo jogo repetidamente.
- ▶ A cada partida uma utilidade diferente pode ser obtida, então como iremos calcular a utilidade?
- ▶ Não é possível escrever na forma extensiva.
- ▶ A soma pode ser ilimitada.

Definição: recompensa futura descontada

Dado uma sequência infinita de recompensas r_1, r_2, \dots para o jogador i e um fator de desconto β com $0 < \beta < 1$ a **recompensa futura descontada** de i é

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_j$$

- ▶ Duas interpretações equivalentes:
 1. o jogador se importa mais com o presente do que com o futuro
 2. o jogador se importa tanto com o futuro quanto com o presente, mas com probabilidade $(1 - \beta)$ a cada round o jogo acaba.

Utilidade em Jogos Repetidos

Definição: recompensa média

Dado uma sequência infinita de recompensas r_1, r_2, \dots para o jogador i a **recompensa média** de i é

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{r_j}{k}$$

Aprendizado em Jogos Repetidos

- ▶ Veremos dois tipos de aprendizado em jogos repetidos
 - ▶ Jogo Fictício
 - ▶ Aprendizado sem arrependimento
- ▶ O termo é um pouco diferente do usado em Aprendizado de Máquinas ou Otimização. Nessas áreas normalmente temos um único agente aprendendo com o ambiente.
- ▶ Na teoria dos jogos temos múltiplos agentes e possivelmente todos estão aprendendo simultaneamente.
- ▶ Ou ainda nem sempre o que aprende melhor é o que recebe a melhor recompensa.

Jogo da Galinha (Chicken Game)



	Acelera	Desvia
Acelera	-100, -100	2, -2
Desvia	-2, 2	0, 0

- ▶ Considere um jogador X que sempre acelera. Talvez ele bata algumas vezes, mas os outros jogadores talvez aprendam que desse jogador é preciso desviar.
- ▶ X é um péssimo aprendiz, mas ensinou os outros.

Jogo Fictício

- ▶ Inicialmente proposta como uma heurística para calcular o Equilíbrio de Nash.
- ▶ Não é de fato muito eficiente para aprendizado, mas contém elementos importantes.
- ▶ Cada Jogador mantém explicitamente uma crença sobre o que os outros jogadores farão.
 - ▶ Inicializa as crenças sobre as estratégias dos adversários.
 - ▶ A cada turno:
 - ▶ Joga sua melhor resposta, para o que acha que os outros jogadores farão
 - ▶ Observa a jogada real e atualiza suas crenças

Formalmente

- ▶ Mantêm uma contagem das ações do adversário (pensando em um jogo com 2 jogadores)
 - ▶ para cada $a \in A$ seja $w(a)$ a quantidade de vezes que o adversário jogou a ação a .
 - ▶ Pode ser inicializado com valores não nulos.
- ▶ Avalia a estratégia do adversário usando esses contadores.

$$\sigma(a) = \frac{w(a)}{\sum_{a' \in A} w(a')}$$

- ▶ Dá a melhor resposta para essa estratégia. (Estratégia pura)

- ▶ Exemplo de Jogo Fictício, combinando moedas.
- ▶ Converge para $\langle (0.5, 0.5), (0.5, 0.5) \rangle$
- ▶ Aprendizado em Teoria dos Jogos é um assunto rico com outras facetas (além do escopo do curso)