Teoria dos Jogos

Hokama PhD

29 de junho de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Desenho de Mecanismo

Design de Mecanismo/Projeto de Mecanismo/Mechanism Design/Teoria da Implementação/Teria dos Jogos Inversa

- Até então analisamos um dado jogo, para prever o comportamento dos agentes.
- Agora suponha que esperamos um certo comportamento.
- Será que conseguimos Projetar um jogo que vai resultar nesse comportamento?

Escolha Social

- Dado um conjunto finito de **resultados** ou **alternativas** O;
- Os agentes tem **preferencias** L, por exemplo agente 1 prefere o resultado a do que b ou c, e prefere b do que c.

Definição: Função de escolha social

Uma **função de escolha social** é uma função $C : L^n \to O$.

Definição: Função de bem-estar social

Uma **função de bem-estar social** é uma função $W : L^n \to L$.

- Em um jogo de votação por exemplo, desejamos que o eleito seja o preferido, talvez o "Menos rejeitado", o "mais aceito", o "mais plural", ...
- Vender um produto, vender a um valor fixo, leilão, que tipo de leilão?

Configuração do Jogo Baysiano

- Não controlamos algumas configurações dos jogos, quais candidatos numa eleição, quais produtos leiloados.
- Não controlamos as preferências dos agentes.
- Começamos com uma configuração sem ações.
- Devemos completar essa configuração para formar um jogo.

Definição: Configuração do Jogos Bayesianos

Uma **Configuração do Jogo Bayesiano** é uma tupla (N, O, Θ, p, u), em que:

- N é um conjunto de n agentes,
- O é um conjunto de resultados,
- $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ em que Θ_i é o conjunto de tipos do jogador i,
- $p : \Theta \to [0, 1]$ é o conhecimento comum sobre os tipos.
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$, em que $u_i : O \times \Theta \to \mathbb{R}$ é a função de utilidade do jogador i

Desenho de Mecanismo

Definição: Configuração do Jogos Bayesianos

Um **mecanismo** para uma configuração de jogo Baysiano (N, O, Θ, p, u) é um par (A, M), em que

- $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, em que A_i é o conjunto de ações disponíveis para o agente $i \in N$; e
- $M : A \to \Pi(O)$ mapeia cada perfil de ações para uma distribuição dos resultados.

- Devemos então escolher um mecanismo que fará agentes racionais se comportarem da forma desejada.
- Podemos entender como um problema de otimização, que tem incertezas.
- Implementar uma certa função de escolha social no equilíbrio, ou seja, se soubéssemos quais os tipos de cada agente poderíamos simplesmente escolher o melhor resultado. Entretanto precisamos obter essa solução num cenário que os agentes podem mentir para obter algum resultado desejado. (Por exemplo: Fazer um voto útil ou tentar jogar um lance mais baixo em um leilão)

Implementação em Estratégias Dominantes

Definição: Implementação em estratégias dominantes

Dado uma configuração de jogo Baysiano (N, O, Θ, p, u), um mecanismo (A, M) é uma **implementação em estratégias dominantes** de uma função de escolha social C (sobre N e O) se para qualquer vetor de funções de utilidade u, o jogo tem um equilíbrio em estratégias dominantes, e em qualquer equilíbrio a^* temos que $M(a^*) = C(u)$.

Implementação em Equilíbrio de Bayes-Nash

Definição: Implementação em equilíbrio de Bayes-Nash

Dado uma configuração de jogo Baysiano (N, O, Θ, p, u), um mecanismo (A, M) é uma **implementação em equilíbrio de Bayes-Nash** de uma função de escolha social C (sobre N e O) se existe um equilíbrio de Bayes-Nash do jogo de informação incompleta (N, A, Θ, p, u) tal que para todo $\theta \in \Theta$ e para todo perfil de ações $a \in A$ que pode surgir dado o perfil de tipo θ nesse equilíbrio, temos que temos que $M(a) = C(u(\cdot, \theta))$.

Exemplo: Votação

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ são eleitores.
- $O = \{a, b, c\}$, são candidatos que podem ser eleitos.

- Os agentes tem seus valores privados θ_i que captura completamente suas preferencias:
  - por exemplo, o tipo $\tilde{\theta}_i$ tem utilidade 3 para a, 2 para b e 1 para c.
  - $u_i(o, \theta_i)$ depende apenas de θ_i
    - Ou seja dado um resultado $o \in O$ qualquer, a utilidade depende somente do tipo do jogador i.
    - no exemplo, $u_i(a, \tilde{\theta}_i) = 3$, $u_i(b, \tilde{\theta}_i) = 2$, e $u_i(c, \tilde{\theta}_i) = 1$,

Tipos

Θ_i é o mesmo para todo i (nesse exemplo) e os tipos são $\{\tilde{\theta}_i, \hat{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}$, em que, todos tem utilidade 3 para seu primeiro cadidato, 2 para o segundo e 1 para o terceiro.

- $\tilde{\theta}_i : a \succ b \succ c$,
- $\hat{\theta}_i : b \succ a \succ c$,
- $\bar{\theta}_i : c \succ a \succ b$,

distribuição de cada tipo é .49, .49 e .02.

Mecanismo: Voto de Pluralidade

Cada eleitor vota em 1 candidato, o que tiver mais votos ganha.

- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, em que $A_i = \{a, b, c\}$,
- $M : A \to \Pi(O)$: escolhe o candidato com mais votos (e.g., $M(b, b, c) = b$,
- Se houver empate, faz um sorteio entre os mais votados.

Sem estratégias dominantes

- Seja n impar e pelo menos 5, e considere o jogador i cujo o tipo é $\bar{\theta}_i$.
- Se metade dos outros eleitores votarem em a e a outra metade em b, então é melhor votar em a
- Se metade dos outros votar em c e a outra metade em a, então é melhor votar em c.
- A ação ótima (para i) depende do que ele acredita que serão os votos dos outros.
- O que acontece se nesses casos se $n = 3$.

Muitos Equilíbrios de Bayes-Nash

- Todos votando em a é um equilíbrio.
- Todos votando em b é um equilíbrio. O tipo $\bar{\theta}_i$ tem o b como seu menos preferido, então se houver qualquer chance seria melhor votar a ou c.
- Um equilíbrio de 'dois candidatos' (Lei de Duverger)
  - $\tilde{\theta}_i$ vota em a
  - $\hat{\theta}_i$ vota em b
  - $\bar{\theta}_i$ acaba votando em a

Mecanismo Direto e Indireto

- Um mecanismo é dito indireto se os agentes enviam múltiplas mensagens.
- Um mecanismo é direto se os agentes enviam uma única mensagem.

Mecanismo Direto para a regra de Pluralidade

- Eleitores dizem qual o tipo eles são. (Notadamente eles podem mentir)
- O mecanismo traduz os tipos em votos:
  - Dizer $\tilde{\theta}_i$ é um voto em a
  - Dizer $\hat{\theta}_i$ é um voto em b
  - Dizer $\bar{\theta}_i$ é um voto em c
- assim sendo o jogo seria como o anterior e os $\bar{\theta}_i$ mentiriam dizendo que são $\tilde{\theta}_i$.
- Outro mecanismo direto seria os votos de $\bar{\theta}_i$ irem para a.

Principio da Revelação

- Qualquer função de escolha social que pode ser implementada por qualquer mecanismo atingindo um equilíbrio, pode ser implementado por um mecanismo **direto** e **verdadeiro** atingindo o mesmo equilíbrio.
- Um mecanismo direto é verdadeiro se o equilíbrio para todo agente é dizer sua informação privada (declarar qual seu tipo).
- Dá aos agentes a estratégia mais simples: simplesmente dizer a verdade.
- Podemos criar um mecanismo direto que simula qualquer mecanismo indireto.
- O mecanismo é verdadeiro, pois atinge o mesmo equilíbrio.
- "Os agentes não precisam mentir, pois o mecanismo já mente por eles."

Exemplos do Principio da Revelação

- Considere o exemplo de votação anterior.
- O principio da revelação diz que qualquer equilíbrio pode ser atingido com um mecanimso direto e verdadeiro.
- Considere o Mecanismo em que cada jogador vota em um candidato e o mais votado ganha.
- $A = A_1 \times ... \times A_n$, em que $A_i = \{a, b, c\}$,
- $M : A \to \Pi(O)$: escolhe o candidato com mais votos,
- Se houver empate, faz um sorteio entre os mais votados.
- Um equilibro para esse jogo seria todo mundo votar em a.
- Qual mecanismo direto e verdadeiro também levaria para esse equilíbrio?
- Eleitores dizem qual o tipo eles são. O mecanismo traduz os tipos em votos:
  - Dizer $\tilde{\theta}_i$ é um voto em a
  - Dizer $\hat{\theta}_i$ é um voto em a
  - Dizer $\bar{\theta}_i$ é um voto em a
- Os eleitores tem incentivo de mentir?

- Outro equilibro para esse jogo seria todo mundo votar em a ou b dependendo do seu favorito.
- Qual mecanismo direto e verdadeiro também levaria para esse equilíbrio?
- Eleitores dizem qual o tipo eles são. O mecanismo traduz os tipos em votos:
  - Dizer $\tilde{\theta}_i$ é um voto em a
  - Dizer $\hat{\theta}_i$ é um voto em b
  - Dizer $\bar{\theta}_i$ é um voto em a
- Os eleitores tem incentivo de mentir?

O mecanismo VCG

Vickrey, Clarke e Groves

- Uma forma geral para agentes egoístas escolherem um resultado que maximiza o bem-estar social.
- Funciona em todo o lugar, desde que um pagamento monetário seja possível (utilidade transferível.)

- Considere o seguinte leilão de um dado item:
- Cada comprador irá fazer o lance do quando valoriza um determinado item.
- Depois o item é doado gratuitamente para aquele que der o maior lance.
- Os compradores tem incentivo de mentir?
- Então o item precisa ser vendido!

Leilão de Primeiro Preço

- Considere que cada comprador vai dizer o quanto aceita pagar em um determinado item em um envelope fechado.
- Os envelopes serão abertos e aquele que der o maior valor leva.
- O ganhador paga o lance que deu.
- Os jogadores tem incentivo de mentir?

Leilão de Segundo preço

leilão de Vickrey

- Aplicado por plataformas de leilão como o eBay.
- Você determina um Orçamento, e o seu lance vai crescendo até ou atingir seu orçamento ou ser o lance ganhador.
- Então se o seu orçamento era de 100 e o segundo maior era de 90. Você só paga 90 e mais algum pequeno incremento.
- Em um leilão de segundo preço, o ganhador paga o segundo maior lance.

Prova:

- Seja $B = \max_{i \neq j} b_j$ o valor do maior lance dos outros jogadores que não i.
- Apesar de i ter infinitos lances possíveis, somente duas coisas podem acontecer:
  - Se $b_i < B$ então i perde e recebe utilidade 0.
  - Se $b_i \geq B$, então i ganha, paga B e sua utilidade será $v_i - B$
- Consideramos então dois casos:
  - Se $v_i < B$, ou ele perde ou ele ganha uma utilidade negativa. Então o melhor que pode acontecer é perder, o que é atingido se $b_i = v_i$
  - Se $v_i \geq B$ ou ele perde ou ganha uma utilidade positiva $v_i - B$, que é obtida jogando $v_i = b_i$.

- Seja v_i o valor do item para o comprador i
- Seja b_i o lance do jogador i no leilão.

Proposição: Incentivo no leilão de segundo preço

Em um leilão de segundo preço, todo comprador i tem uma estratégia dominante: fazer seu lance b_i igual ao seu valor privado v_i.